



А.А. Усольцев, В.С. Томасов

МНОГОФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И ВРАЩАЮЩИЕСЯ ПОЛЯ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2015

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

А.А. Усольцев, В.С. Томасов

**МНОГОФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ
И ВРАЩАЮЩИЕСЯ ПОЛЯ**

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2015

А.А. Усольцев, В.С. Томасов Многофазные электрические цепи и вращающиеся поля: Учебное пособие. [Электронный ресурс] — Электрон. дан. — СПб: Университет ИТМО, 2015. – 172 с. – Режим доступа: — http://www.ets.ifmo.ru/usolzev/MPEC_RF.pdf— Загл. с экрана.

Учебное пособие содержит изложение основ теории, расчета и проектирования многофазных систем и является руководством к выполнению лабораторно-практической курсовой работы в среде Matlab/Simulink «Многофазные ЭЦ и вращающиеся электромагнитные поля».

Пособие предназначено для студентов специальностей № 13.03.02, 13.04.02.



Университет ИТМО – ведущий вуз России в области информационных и фотонных технологий, один из немногих российских вузов, получивших в 2009 году статус национального исследовательского университета. С 2013 года Университет ИТМО – участник программы повышения конкурентоспособности российских университетов среди ведущих мировых научнообразовательных центров, известной как проект «5 в 100». Цель Университета ИТМО – становление исследовательского университета мирового уровня, предпринимательского по типу, ориентированного на интернационализацию всех направлений деятельности.

©Университет ИТМО, 2015

© А.А. Усольцев, В.С. Томасов, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Многофазные электрические и электромеханические системы обладают рядом преимуществ по сравнению с однофазными системами, заключающихся в следующем:

1. Возможность построения уравновешенных систем при числе фаз $m > 2$, в которых суммарная мгновенная мощность величина постоянная, не зависящая от времени, благодаря чему обеспечиваются лучшие условия работы генераторов и приемников, а также экономия проводящих материалов при построении линий электропередачи.
2. Многофазные системы позволяют создать вращающиеся (бегущие) электромагнитные поля, лежащие в основе действия многих электромеханических преобразователей (асинхронные, синхронные, шаговые электрические машины, волновые электродвигатели, электромашинные устройства систем синхронной связи и др.).

Эти преимущества обеспечили широкое применение многофазных систем в электроэнергетике, автоматике, приборостроении.

Последние десятилетия являлись годами бурного развития силовой электроники и электромеханотроники, объединяющей в себе информационно-измерительные и управляющие устройства, электрические машины, питаемые от силовых полупроводниковых преобразователей, создающих на выходе систему многофазных периодических, несинусоидальных напряжений или токов.

В связи с этим при подготовке бакалавров и магистров по направлениям подготовки 13.03.02, 13.04.02 «Энергетика и электротехника» особое значение приобретают вопросы теории и практического использования многофазных

систем не только при гармонических, но и при полигармонических возмущениях.

Эти вопросы не нашли должного отражения в современной учебной литературе по курсам ТОЭ, «Электротехника», «Электрические машины». Настоящее пособие должно в некоторой степени восполнить этот пробел.

В нем систематически излагаются разделы многофазных электрических цепей с различными видами периодических возмущений, вращающихся электрических и магнитных полей, и способов управления ими, используемых в электромеханических преобразователях.

Эти разделы рассмотрены на базе методов гармонического анализа, симметричных составляющих, обобщенных вращающихся векторов переменных и методов математического моделирования в среде Matlab/Simulink.

Учебное пособие предназначено для самостоятельной работы студентов по освоению соответствующих разделов курса ТОЭ и электротехники, читаемых для студентов специальностей и направлений: 13.03.02, 13.04.02.

Оно содержит изложение основ теории, расчета и проектирования многофазных систем и является руководством к выполнению лабораторно-практической курсовой работы в среде Matlab/Simulink «Многофазные ЭЦ и вращающиеся электромагнитные поля».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. Многофазные электрические цепи.....	7
2. Вращающееся магнитное поле	51
3.Пространственные векторы в теории электрических машин и практике управления ими	76
4. Моделирование в автономных инверторов среде Matlab/Simulink	110
5. Показатели качества энергопотребления	142
6. Энергоэффективность алгоритмов ШИМ	158
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	167

1. Многофазные электрические цепи

1.1 Понятие о многофазных электрических цепях и системах

Совокупность нескольких электрических цепей, в которых действуют источники ЭДС, имеющие одинаковую частоту, и смещённые по фазе относительно друг друга, называется *многофазной системой электрических цепей* или *многофазной электрической цепью*. Каждая цепь, входящая в систему называется *фазой цепи*, а их число – *числом фаз*.

Совокупность ЭДС, действующих в многофазной системе называется *многофазной системой ЭДС* или *многофазным источником ЭДС*, а совокупность токов – *многофазной системой токов*. При этом следует заметить, что ЭДС и токи в многофазной системе имеют одинаковые частоты, но могут отличаться друг от друга по величине и по фазе.

Многофазная система называется *несвязанной*, если её фазы не имеют электрического соединения между собой. В противном случае система называется *связанной*.

Если комплексные сопротивления фаз многофазной цепи одинаковы, то такая цепь называется *симметричной*.

1.2. Симметричные многофазные системы

Многофазная система ЭДС или токов

$$\begin{aligned} e_1 &= E_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1); & i_1 &= I_{1m} \sin(\omega t + \alpha_1); \\ e_2 &= E_{2m} \sin(\omega t + \alpha_2); & i_2 &= I_{2m} \sin(\omega t + \alpha_2); \\ & \vdots & & \vdots \\ e_m &= E_{mm} \sin(\omega t + \alpha_m). & i_m &= I_{mm} \sin(\omega t + \alpha_m). \end{aligned} \quad (1.1)$$

называется симметричной, если все ЭДС или токи, входящие в неё имеют одинаковые амплитуды и смещены по фазе относительно друг друга на угол

$$\psi_q = q \frac{2\pi}{m}, \quad (1.2)$$

где m – число фаз, а $q=1, 2 \dots m$ – кратность фазового смещения.

В общем виде действующие значения ЭДС и токов m -фазной системы (1.1) можно записать в символической форме:

$$\underline{E}_1 = E_1 e^{j\alpha_1}; \underline{E}_2 = E_2 e^{j\alpha_2}; \dots \underline{E}_m = E_m e^{j\alpha_m};$$

$$\underline{I}_1 = I_1 e^{j\beta_1}; \underline{I}_2 = I_2 e^{j\beta_2}; \dots \underline{I}_m = I_m e^{j\beta_m}.$$

Тогда для симметричных систем должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} a) \quad & E_1 = E_2 = \dots = E_m = E; \\ & I_1 = I_2 = \dots = I_m = I; \\ b) \quad & \alpha_2 = \alpha_1 - \psi_q; \alpha_3 = \alpha_1 - 2\psi_q; \dots \alpha_m = \alpha_1 - (m-1)\psi_q \\ & \beta_2 = \beta_1 - \psi_q; \beta_3 = \beta_1 - 2\psi_q; \dots \beta_m = \beta_1 - (m-1)\psi_q \end{aligned}$$

(1.3)

Нарушение любого из условий *a* и/или *b* нарушает симметрию системы. Причём, *из симметрии ЭДС не следует симметрия токов* и наоборот. Взаимосвязь условий симметрии систем ЭДС и токов существует только в случае симметрии цепи, т.е. если

$$\begin{aligned} \underline{Z}_1 = z_1 e^{j\varphi_1} = \frac{E_1}{I_1} e^{j(\alpha_1 - \beta_1)} = \underline{Z}_2 = z_2 e^{j\varphi_2} = \frac{E_2}{I_2} e^{j(\alpha_2 - \beta_2)} = \dots \\ \dots \underline{Z}_m = z_m e^{j\varphi_m} = \frac{E_m}{I_m} e^{j(\alpha_m - \beta_m)} = \underline{Z} = z e^{j\varphi} \end{aligned}$$

⇓

$$\frac{E_1}{I_1} = \frac{E_2}{I_2} = \dots = \frac{E_m}{I_m} = z;$$

(1.4)

$$\varphi_1 = \alpha_1 - \beta_1 = \varphi_2 = \alpha_2 - \beta_2 = \dots = \varphi_m = \alpha_m - \beta_m = \varphi.$$

Тогда из условий симметрии (1.3), например, для ЭДС – $E_1 = E_2 = \dots = E_m = E$; $\alpha_2 = \alpha_1 - \psi_q$; $\alpha_3 = \alpha_1 - 2\psi_q$; $\dots \alpha_m = \alpha_1 - (m-1)\psi_q$, и условий симметрии цепи (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} I_1 = I_2 = \dots = I_m = I = E / z; \\ \beta_2 = \alpha_2 - \varphi_2 = \alpha_2 - \varphi_1 = \alpha_1 - \psi_q - \varphi_1 = \beta_1 - \psi_q; \\ \beta_3 = \alpha_3 - \varphi_3 = \alpha_3 - \varphi_1 = \alpha_1 - 2\psi_q - \varphi_1 = \beta_1 - 2\psi_q; \dots \\ \vdots \\ \beta_m = \alpha_m - \varphi_m = \alpha_m - \varphi_1 = \alpha_1 - (m-1)\psi_q - \varphi_1 = \beta_1 - (m-1)\psi_q, \end{aligned}$$

т.е. система токов симметрична.

Принимая начальную фазу первой ЭДС за исходную и полагая её равной нулю ($\alpha_1 = 0$), все ЭДС симметричной *m*-фазной системы можно представить в символической форме как:

$$\underline{E}_{kq} = E e^{-j(k-1)\psi_q},$$

(1.5)

где $k = 1, 2, \dots, m$ – порядковый номер фазы; E – действующее значение фазной ЭДС.

Присваивая кратности фазового смещения q различные значения, можно получить m различных вариантов симметричных систем. На рис. 1.1 показаны все возможные варианты симметричных трёх-, пяти- и шестифазных систем. В системах, полученных при $q = 1$, номера фазных векторов последовательно увеличиваются на единицу в направлении по часовой стрелке, т.е. в направлении отставания по фазе, и образуют прямую последовательность цифр $(1, 2, \dots, m)$. Такие системы называются *системами с прямым порядком следования (чередования) фаз*. В системах, образованных при $q = m - 1$ или при $q = -1$, порядок следования номеров фаз обратный $(m, m-1, \dots, 1)$ и они называются *системами с обратным порядком следования (чередования) фаз*. В случае $q = m$ или, что то же самое, $q = 0$, сдвиг фаз равен нулю, все величины совпадают друг с другом по фазе, и такие системы называются *системами нулевого порядка или нулевыми системами*. При всех других значениях кратности фазового смещения $1 < q < (m - 1)$ порядок следования фаз будет *перемежающимся*.

Очевидно, что для трёхфазных цепей возможны только три варианта симметричных систем: с прямым и обратным порядком чередования фаз, а

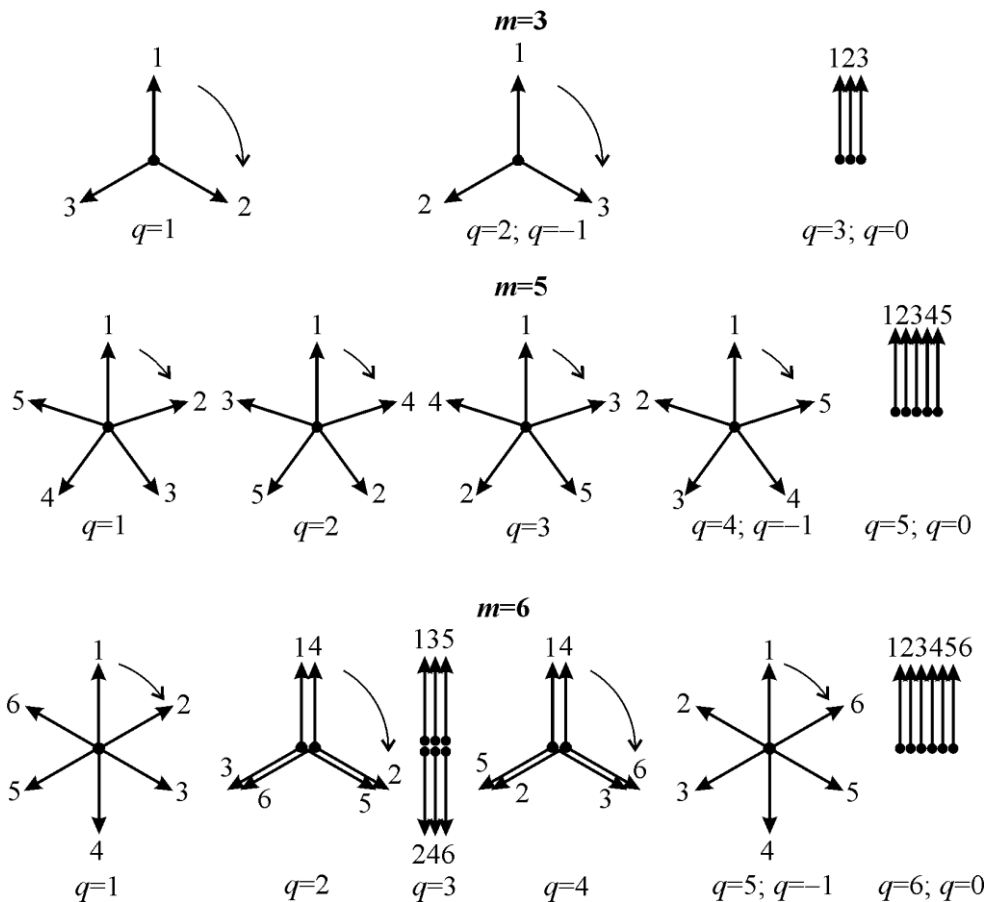


Рис.1.1

также система нулевого порядка.

Комплексные ЭДС и токи m -фазной симметричной системы можно также представить с помощью оператора поворота

$$\underline{a}_m = \cos(2\pi/m) + j \sin(2\pi/m) = e^{j2\pi/m} \quad (1.6)$$

в виде

$$\underline{E}_{kq} = E(\underline{a}_m)^{-(k-1)q}. \quad (1.7)$$

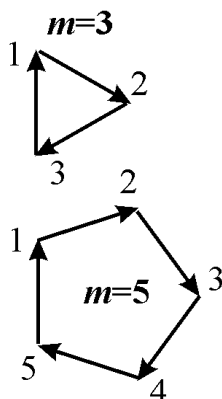


Рис. 1.2.

Присваивая q целые значения от 0 до $m-1$, можно получить все варианты чередования фаз в системе.

Независимо от порядка чередования фаз векторы фазных ЭДС или токов в симметричной ненулевой системе образуют на плоскости комплексных чисел симметричную m -лучевую звезду (рис. 1.1), а при построении топографической диаграммы – правильный многоугольник (рис. 1.2)/

В симметричных системах, у которых число фаз m является простым числом, изменение кратности фазового смещения q в пределах от 1 до $(m-1)$ приводит к прямому, обратному и перемежающемуся порядкам чередования фаз с сохранением фазового сдвига между векторами, т.е. с сохранением числа фаз (см. рис. 1.1). В системах с четным числом фаз и с нечётным, но имеющим целочисленный делитель, изменение q приводит к фазовым сдвигам эквивалентным изменению числа фаз. Например, на рис. 1.1 шестифазная симметричная система при $q=3$ трансформируется в двухфазную с тройной амплитудой, а при $q=2$ и $q=4$ – в трёхфазную с двойной амплитудой.

1.3. Основное свойство симметричных систем

Рисунок 1.2 иллюстрирует основное свойство всех симметричных систем, кроме систем нулевого порядка. Оно заключается в том, что *сумма всех векторов симметричной системы равна нулю*. Поэтому в этих системах и *сумма мгновенных значений ЭДС или токов в любой момент времени равна нулю*. В символической форме записи условие симметрии имеет вид $\sum_{k=1}^m \underline{E}_k = 0$.

Действительно, пусть $q=1$, тогда

$$\sum_{k=1}^m \underline{E}_k = E \sum_{k=1}^m (\underline{a}_m)^{-(k-1)} = E \left[1 + (\underline{a}_m)^{-1} + (\underline{a}_m)^{-2} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)} \right] = E \underline{S}, \quad (1.8)$$

где $\underline{S} = \sum_{k=1}^m (\underline{a}_m)^{-(k-1)}$. Но $1 = (\underline{a}_m)^{-m}$, т.к. $(\underline{a}_m)^{-m} = e^{(-j2\pi/m) \cdot m} = e^{j2\pi} = e^{j0} = 1$.

Поэтому, подставляя это тождество в (1.8), получим

$$\begin{aligned} E \underline{S} &= E \left[1 + (\underline{a}_m)^{-1} + (\underline{a}_m)^{-2} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)} \right] = \\ &= E \left[(\underline{a}_m)^{-m} + (\underline{a}_m)^{-1} + (\underline{a}_m)^{-2} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)} \right] = \\ &= E (\underline{a}_m)^{-1} \left[(\underline{a}_m)^{-(m-1)} + (\underline{a}_m)^0 + (\underline{a}_m)^{-1} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-2)} \right] = \\ &= E (\underline{a}_m)^{-1} \left[1 + (\underline{a}_m)^{-1} + (\underline{a}_m)^{-2} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)} \right] = E \underline{S} (\underline{a}_m)^{-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Равенство $E \underline{S} = E \underline{S} (\underline{a}_m)^{-1}$ справедливо только при условии $(\underline{a}_m)^{-1} = 1$, а также, если равны нулю один или оба сомножителя: $E=0$ и/или $\underline{S}=0$. Но т.к. в общем случае $E \neq 0$ и $(\underline{a}_m)^{-1} \neq 1$, то, следовательно,

$$\underline{S} = \left[1 + (\underline{a}_m)^{-1} + (\underline{a}_m)^{-2} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)} \right] = 0.$$

Таким образом, $\sum_{k=1}^m \underline{E}_k = 0$ и $\sum_{k=1}^m e_k(t) = 0$. Аналогично для системы токов справедливо $\sum_{k=1}^m \underline{I}_k = 0$ и $\sum_{k=1}^m i_k(t) = 0$.

В общем случае симметричной системы ненулевого порядка кратность фазового смещения равна $0 < q < m$ и выражение (1.8) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^m \underline{E}_k = E \sum_{k=1}^m (\underline{a}_m)^{-(k-1)q} = E \left[1 + (\underline{a}_m)^{-1q} + (\underline{a}_m)^{-2q} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)q} \right] = E \underline{S}'.$$

Так как q — целое число, то для него также справедливо равенство $(\underline{a}_m)^{-mq} = e^{(-j2\pi/m)mq} = e^{j2\pi q} = e^{j0} = 1$. Подставляя это условие в сумму, путём аналогичных выкладок получим тождество:

$$\begin{aligned} E \underline{S}' &= E \left[1 + (\underline{a}_m)^{-q} + (\underline{a}_m)^{-2q} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)q} \right] = \\ &= E \left[(\underline{a}_m)^{-mq} + (\underline{a}_m)^{-q} + (\underline{a}_m)^{-2q} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)q} \right] = \\ &= E (\underline{a}_m)^{-q} \left[(\underline{a}_m)^{-(m-1)q} + (\underline{a}_m)^0 + (\underline{a}_m)^{-q} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-2)q} \right] = \\ &= E (\underline{a}_m)^{-q} \left[1 + (\underline{a}_m)^{-q} + (\underline{a}_m)^{-2q} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m-1)q} \right] = E \underline{S}' (\underline{a}_m)^{-q} \end{aligned}$$

которое при $(\underline{a}_m)^{-q} \neq 1$ и $E \neq 0$ выполняется только, если

$$\underline{S}' = \left[1 + (\underline{a}_m)^{-q} + (\underline{a}_m)^{-2q} + \dots + (\underline{a}_m)^{-(m+1)q} \right] = \sum_{k=1}^m (\underline{a}_m)^{-(k-1)q} = 0. \quad (1.10)$$

Пользуясь выражением (1.6) для оператора поворота и тождеством (1.10), для ненулевой системы m векторов с модулем, равным A , условие симметрии можно представить в виде

$$A \sum_{k=1}^m (\underline{a}_m)^{-(k-1)q} = 0 \Rightarrow A \sum_{k=1}^m \cos[-(k-1)q2\pi/m] + jA \sum_{k=1}^m \sin[-(k-1)q2\pi/m] = 0$$

$\Downarrow$

$$A \sum_{k=1}^m \cos[-(k-1)q2\pi/m] = A \sum_{k=1}^m \cos[(k-1)q2\pi/m] = 0;$$

$$A \sum_{k=1}^m \sin[-(k-1)q2\pi/m] = -A \sum_{k=1}^m \sin[(k-1)q2\pi/m] = A \sum_{k=1}^m \sin[(k-1)q2\pi/m] = 0.$$

где $0 < q < m$.

(1.11)

1.4. Уравновешенные и неуровновешенные системы

Многофазные системы ЭДС и токов можно разделить на *уравновешенные*, т.е. системы в которых *мгновенное значение мощности не зависит от времени*, и *неуравновешенные*, в которых мгновенное значение мощности изменяется с течением времени.

Любая многофазная система при условии

$$q/m \neq s/2,$$

где $s=1,2$, будет уравновешенной, если системы ЭДС и токов симметричны. Действительно, в случае симметрии ЭДС и токи k -й фазы равны:

$$e_k = E\sqrt{2} \sin[\omega t - (k-1)q2\pi/m], \quad i_k = I\sqrt{2} \sin[\omega t \pm \varphi - (k-1)q2\pi/m],$$

а мгновенное значение мощности –

$$\begin{aligned} p_k = e_k i_k &= 2EI \sin[\omega t - (k-1)q2\pi/m] \sin[\omega t \pm \varphi - (k-1)q2\pi/m] = \\ &= EI \{ \cos \varphi - \cos[2\omega t \pm \varphi - 2(k-1)q2\pi/m] \} \end{aligned}$$

Суммируя мощности всех m фаз, получим:

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^m p_k = \sum_{k=1}^m EI \cos \varphi - EI \sum_{k=1}^m \cos[2\omega t \pm \varphi - 2(k-1)q2\pi/m] = \\ &= mEI \cos \varphi - EI \sum_{k=1}^m \cos[2\omega t \pm \varphi - 2(k-1)q2\pi/m] \end{aligned}$$

Если $q/m=1/2$ или $q/m=1$, то $2(k-1)q2\pi/m = (k-1)2\pi = (k-1)4\pi = 0$.

Отсюда

$$EI \sum_{k=1}^m \cos[2\omega t \pm \varphi - 2(k-1)q2\pi/m] = mEI \cos(2\omega t \pm \varphi)$$

⇓

$$p = mEI [\cos \varphi - \cos(2\omega t \pm \varphi)] = p(t)$$

Следовательно, мгновенное значение мощности является функцией времени и система неуравновешенна.

В противном случае для суммы $\sum_{k=1}^m \cos[2\omega t \pm \varphi - 2(k-1)q2\pi/m]$ выполняется условие симметрии для m -фазной системы (1.11), т.е. эта сумма равна нулю. Тогда $EI \sum_{k=1}^m \cos[2\omega t \pm \varphi - 2(k-1)q2\pi/m] = 0$ и $p = mEI \cos \varphi = \text{const}$, т.е. система уравновешенна.

Таким образом, любая нулевая симметричная многофазная система ЭДС и токов будет неуравновешенной, т.к. в ней $q/m=1$. Неуравновешенной будет также, например, шестифазная система ЭДС и токов при $q=3$ (см. рис. 1.1), а также любая симметричная система с чётным числом фаз, если $q=m/2$. Очевидно, что неуравновешенной всегда будет симметричная двухфазная система, т.к. в ней возможны только соотношения $q/m=1/2$ и $q/m=1$, а также однофазная система ($q/m=1$). Следовательно, *уравновешенной симметричной системой с минимально возможным числом фаз является трёхфазная система.*

Асимметрия систем ЭДС и токов не является признаком неуравновешенности многофазной системы. Например, двухфазная несимметричная система, образуемая фазными величинами, смещёнными по отношению друг к другу на 90° , будет уравновешенной, т.к.

$$p_1 = e_1 i_1 = E\sqrt{2} \sin \omega t \cdot I\sqrt{2} \sin(\omega t \pm \varphi) = EI [\cos \varphi - \cos(2\omega t \pm \varphi)];$$

$$\begin{aligned} p_2 = e_2 i_2 &= E\sqrt{2} \sin(\omega t - \pi/2) \cdot I\sqrt{2} \sin(\omega t \pm \varphi - \pi/2) = \\ &= EI [\cos \varphi - \cos(2\omega t \pm \varphi - \pi)] = EI [\cos \varphi + \cos(2\omega t \pm \varphi)]; \end{aligned}$$

$$p_1 + p_2 = 2EI \cos \varphi = \text{const}.$$

Неуравновешенность системы крайне нежелательна, т.к. вызывает дополнительные потери энергии в источниках, приёмниках и линиях передачи.

1.5. Связывание трёхфазных систем

Трёхфазные цепи являются наиболее распространённым частным случаем многофазных цепей. Три отдельные электрические цепи, каждая из которых включает источник ЭДС и нагрузку, образуют *несвязанную трёхфазную систему* (рис. 1.3, а). В несвязанной трёхфазной системе источники электрической энергии и нагрузка соединены шестью проводами (рис. 1.3, а) и, в случае отсутствия магнитной связи между фазами источника и/или нагрузки, представляют собой три независимые электрические цепи, т.е. такие цепи, режим работы каждой из которых не зависит от состояния (режима работы) двух других.

Если же источники ЭДС и нагрузки фаз соединить между собой, то образуется связанная трёхфазная цепь. На рис. 1.3, б показана трёхфазная цепь, в которой фазы источника и нагрузка соединены (связаны) звездой. В связанной системе источник и нагрузка соединены только четырьмя проводами, и такая система называется *четырёхпроводной*. В некоторых случаях, как мы увидим далее, число проводов может быть уменьшено до трёх.

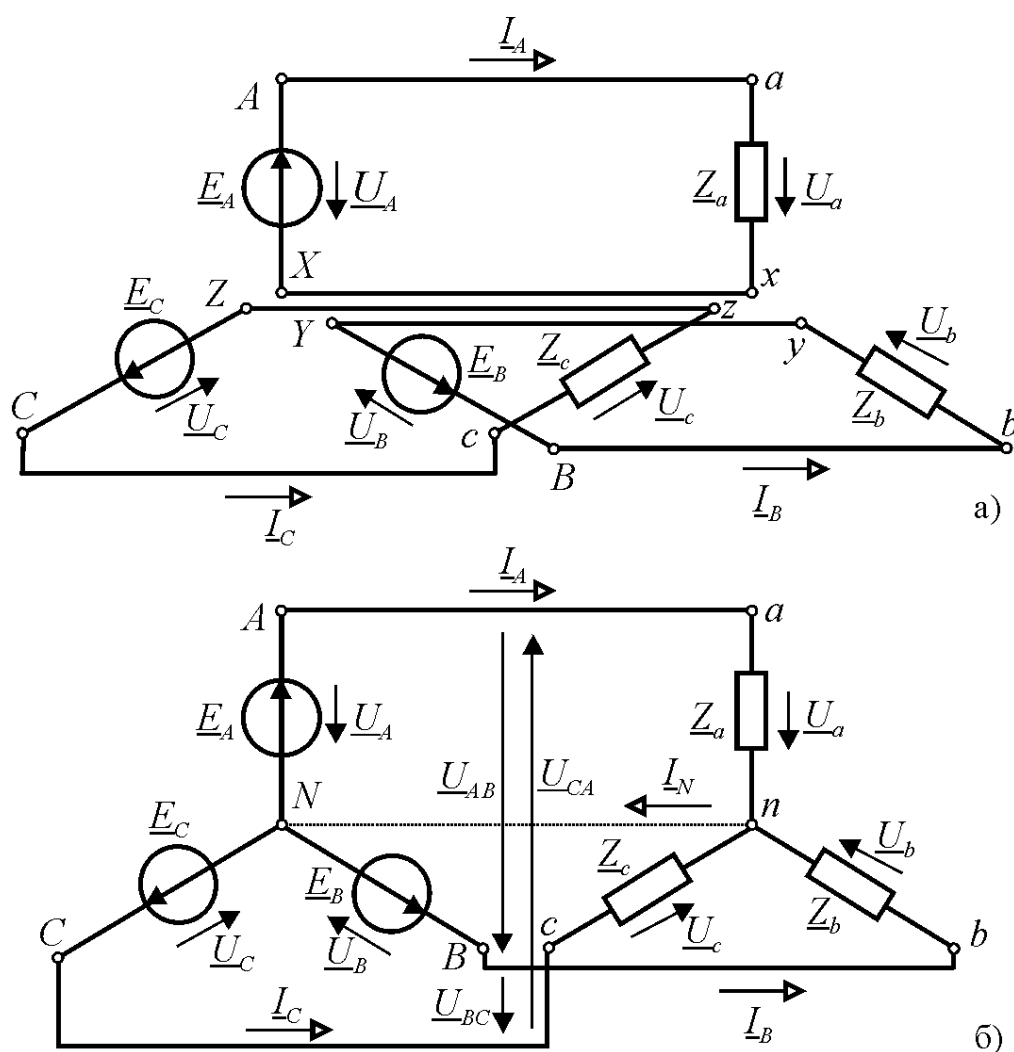


Рис. 1.3

Уменьшение числа проводов существенно снижает стоимость и

эксплуатационные расходы линий передачи и распределения электроэнергии и является одной из причин, по которой в электроэнергетике используются только связанные многофазные системы питания.

Условные начала фаз источника питания обозначаются первыми тремя прописными буквами латинского алфавита (A, B, C), а концы – последними тремя буквами (X, Y, Z). Начала и концы фаз нагрузки обозначаются теми же строчными буквами (a, b, c, x, y, z).

Если фазы источника и нагрузки связать звездой, то образуются узлы соединений, которые называются *нейтральными (нулевыми) точками* или *нейтралями* (N, n на 1.3, б). Для потенциалов этих точек справедливо $\phi_N = \phi_X = \phi_Y = \phi_Z$ и $\phi_n = \phi_x = \phi_y = \phi_z$. Провод, соединяющий нулевые точки, называется *нейтральным (нулевым) проводом*.

Напряжения между началами и концами фаз источника и нагрузки называются *фазными напряжениями* ($\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C, \underline{U}_a, \underline{U}_b, \underline{U}_c$). Если сопротивлением проводов, соединяющих источник и нагрузку, можно

пренебречь, то $\underline{U}_A = -\underline{E}_A = \underline{U}_a$, $\underline{U}_B = -\underline{E}_B = \underline{U}_b$, $\underline{U}_C = -\underline{E}_C = \underline{U}_c$. Токи, протекающие между началами и концами фаз источника или нагрузки ($\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C, \underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c$), называются *фазными токами*.

Проводники, соединяющие источник и нагрузку, называются *линейными проводами*, а токи в них – *линейными токами*. Очевидно, что в случае соединения нагрузки звездой фазные токи равны линейным, т.е. $\underline{I}_\phi = \underline{I}_\text{л}$. Напряжения между линейными

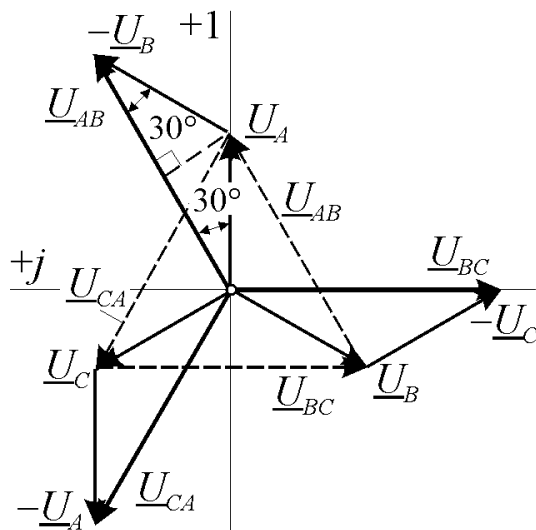


Рис. 1.4

проводами называются *линейными напряжениями* (U_{AB}, U_{BC}, U_{CA} на рис. 1.3, б).

Связать фазные элементы можно также треугольником, но обмотки источников питания обычно соединяют звездой. В этом случае с помощью второго закона Кирхгофа можно установить соотношения между комплексными фазными и линейными напряжениями источника (рис. 1.3, б):

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_A - \underline{U}_B; \quad \underline{U}_{BC} = \underline{U}_B - \underline{U}_C; \quad \underline{U}_{CA} = \underline{U}_C - \underline{U}_A. \quad (1.12)$$

В симметричной трёхфазной системе фазные напряжения одинаковы

$$U_A = U_B = U_C = U_p.$$

Подставляя комплексные фазные напряжения в первое уравнение (1.12), получим:

$$\underline{U}_{AB} = U_p - U_p \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{U_p}{2} (3 + j\sqrt{3})$$

↓

$$|\underline{U}_{AB}| = U_l = \frac{U_p}{2} \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = U_p \sqrt{3}$$

Это соотношение можно получить также геометрическими построениями в треугольнике векторов $\underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$ на рис. 1.4. Отсюда, с учётом равенства линейных напряжений:

$$U_{AB} = U_{BC} = U_{CA} = U_l = U_p \sqrt{3}. \quad (1.13)$$

1.5.1.. Соединение нагрузки звездой с нейтральным проводом

При наличии в цепи нейтрального провода, т.е. в четырёхпроводной сети, фазные напряжения нагрузки и источника равны $\underline{U}_A = \underline{U}_a$; $\underline{U}_B = \underline{U}_b$; $\underline{U}_C = \underline{U}_c$, а комплексные фазные токи можно определить по закону Ома

$$\underline{I}_a = \underline{U}_A / \underline{Z}_a; \quad \underline{I}_b = \underline{U}_B / \underline{Z}_b; \quad \underline{I}_c = \underline{U}_C / \underline{Z}_c. \quad (1.14)$$

Фазные токи объединяются в узлах N и n с током нейтрального провода и по закону Кирхгофа с учётом принятых положительных направлений можно составить уравнение:

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = \underline{I}_N. \quad (1.15)$$

Нагрузка, у которой комплексные сопротивления фаз одинаковы $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}_p = Z_p e^{j\varphi}$, называется *симметричной*. В случае симметрии нагрузки и фазных напряжений

$$\underline{U}_k = U_p (\underline{a}_3)^{-(k-1)} = U_p e^{j(k-1)2\pi/3}; \quad k=1,2,3$$

фазные токи

$$\underline{I}_k = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k} = \frac{U_p}{Z_p} e^{j[(k-1)2\pi/3 - \varphi]} = I_p e^{j[(k-1)2\pi/3 - \varphi]}; \quad k=1,2,3$$

образуют симметричную систему (рис. 1.5, а), вследствие чего ток в нейтральном проводе отсутствует $\underline{I}_N = 0$.

При несимметричной нагрузке ток нейтрального провода $\underline{I}_N \neq 0$ и может достигать значительных величин. На рис. 1.5, б приведён пример векторной

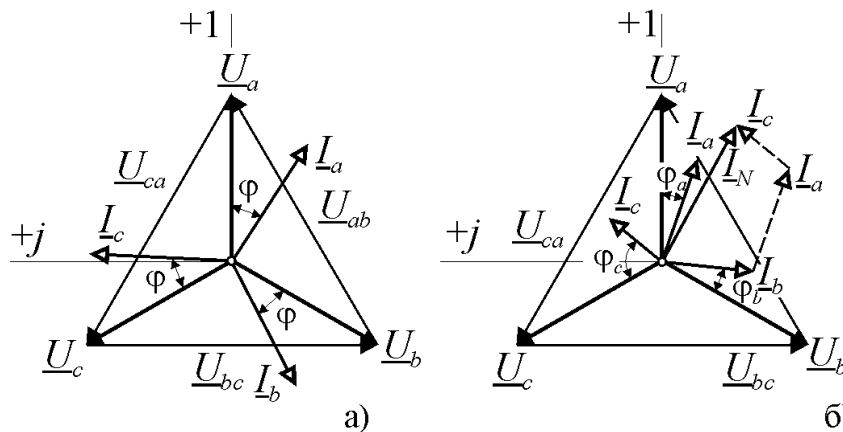


Рис. 1.5

диаграммы для случая активно-индуктивной нагрузки в фазах a и c и активно-ёмкостной в фазе b . Векторы токов в первых двух фазах смещены в сторону запаздывания по отношению к соответствующим

напряжениям на углы φ_a и φ_c , а в фазе b – в сторону опережения на угол φ_b . Суммируя все три вектора, мы получим вектор тока нейтрального провода $\underline{I}_N$, с модулем, превосходящим модули фазных токов.

Трёхфазные сети проектируют и эксплуатируют таким образом, чтобы нагрузка в них была по-возможности симметричной. В этом случае ток нейтрального провода незначителен и его сечение можно существенно уменьшить по сравнению с сечением линейных проводов. Наличие нейтрального провода позволяет включать нагрузку не только между линейными проводами, но также между одним из линейных проводов и нейтральным проводом под фазное напряжение. Такая возможность является весьма существенным преимуществом четырёхпроводных сетей, наиболее распространённой из которых является сеть с напряжениями 380/220 В.

1.5.2. Соединение нагрузки звездой без нейтрального провода

Отсутствие тока в нейтральном проводе при симметричной нагрузке означает, что этот провод вообще можно исключить и тогда трёхфазная сеть становится *трёхпроводной*.

Если нагрузку сети мысленно охватить замкнутой поверхностью, то по первому закону Кирхгофа для линейных проводов трёхпроводной сети, входящих в эту поверхность, можно составить уравнение

$$i_A + i_B + i_C = 0 \Leftrightarrow \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \quad (1.16)$$

Расчёт токов в трёхпроводной сети при симметричной нагрузке ничем не отличается от расчёта в сети с нейтральным проводом

$$\underline{I}_a = \frac{\underline{U}_A}{\underline{Z}_p} = \frac{U_p e^{j0}}{Z_p e^{j\varphi}} = I_p e^{-j\varphi}.$$

Идентичны в этом случае и векторные диаграммы токов и напряжений (рис. 1.6, а).

Отсутствие симметрии нагрузки нарушает симметрию фазных токов и напряжений, в то время как фазные и линейные напряжения генератора остаются симметричными (рис. 1.6, б). В результате этого изменяется потенциал нейтральной точки n и между нейтралями генератора и нагрузки возникает разность потенциалов $\underline{U}_{Nn}$, называемая *смещением нейтрали*.

Эту разность потенциалов можно найти методом двух узлов

$$\underline{U}_{Nn} = \frac{\underline{U}_A \underline{Y}_a + \underline{U}_B \underline{Y}_b + \underline{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c}, \quad (1.17)$$

где $\underline{U}_A, \underline{U}_B, \underline{U}_C$ – комплексные фазные напряжения генератора, а $\underline{Y}_a, \underline{Y}_b, \underline{Y}_c$ – комплексные проводимости фаз нагрузки.

Отсюда можно найти фазные напряжения нагрузки

$$\underline{U}_a = \underline{U}_A - \underline{U}_{Nn}; \quad \underline{U}_b = \underline{U}_B - \underline{U}_{Nn}; \quad \underline{U}_c = \underline{U}_C - \underline{U}_{Nn}, \quad (1.18)$$

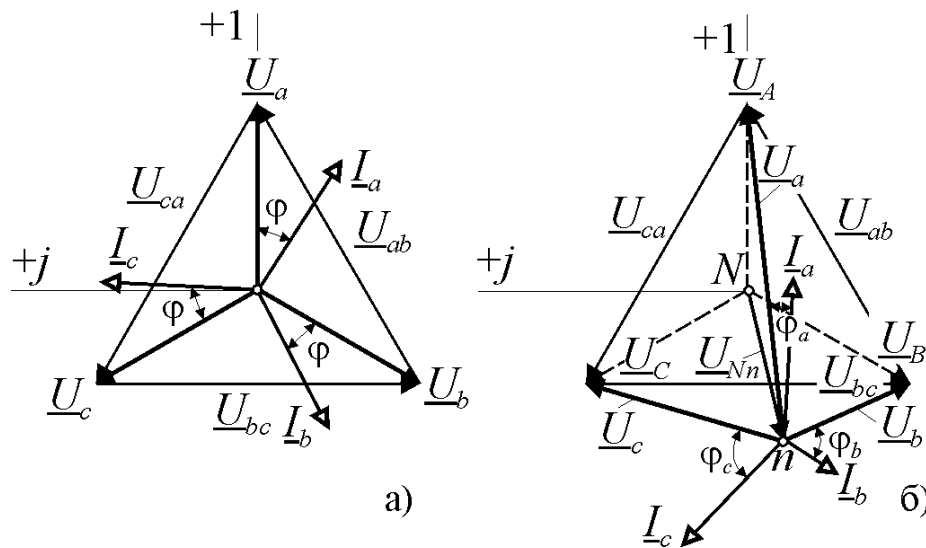


Рис. 1.6

а затем по закону Ома фазные токи

$$\underline{I}_a = \underline{Y}_a \underline{U}_a; \quad \underline{I}_b = \underline{Y}_b \underline{U}_b; \quad \underline{I}_c = \underline{Y}_c \underline{U}_c. \quad (1.19)$$

На рис. 1.6, б приведён пример векторной диаграммы токов и напряжений в трёхфазной сети с активно-индуктивной нагрузкой фаз a и b и активно-ёмкостной фазы c . Вследствие асимметрии нейтральная точка нагрузки n

сместились относительно нейтральной точки генератора N . Однако линейные напряжения нагрузки, определяемые ЭДС генератора, остались неизменными $\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB}$, $\underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC}$, $\underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA}$. Поэтому векторы фазных напряжений нагрузки $\underline{U}_a$, $\underline{U}_b$, $\underline{U}_c$ приходят в те же точки, что и векторы фазных напряжений генератора $\underline{U}_A$, $\underline{U}_B$, $\underline{U}_C^*$. Векторы фазных токов $\underline{I}_a$, $\underline{I}_b$, $\underline{I}_c$ строятся относительно векторов фазных напряжений $\underline{U}_a$, $\underline{U}_b$, $\underline{U}_c$ с учётом характера нагрузки в фазах.

Как следует из выражений (1.17)-(1.19), изменение нагрузки в любой фазе вызывает смещение нейтрали и изменение напряжений и токов в других фазах. Поэтому соединение звездой в трёхпроводной системе питания можно использовать только для симметричной нагрузки, например, для трёхфазных двигателей.

1.5.3. Соединение нагрузки треугольником

В случае соединения нагрузки треугольником сопротивления фаз подключаются к линейным проводам (рис. 1.7, а). Фазные напряжения при этом оказываются равными линейным напряжениям генератора:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{U}_{AB}; \quad \underline{U}_{bc} = \underline{U}_{BC}; \quad \underline{U}_{ca} = \underline{U}_{CA}.$$

Фазные токи рассчитываются по закону Ома:

$$\underline{I}_{ab} = \underline{U}_{AB} / \underline{Z}_{ab}; \quad \underline{I}_{bc} = \underline{U}_{BC} / \underline{Z}_{bc}; \quad \underline{I}_{ca} = \underline{U}_{CA} / \underline{Z}_{ca}. \quad (1.20)$$

* На рисунке эти векторы показаны штриховыми линиями

Линейные токи определяются через фазные по закону Кирхгофа для узлов a, b, c :

$$\underline{I}_A = \underline{I}_{ab} - \underline{I}_{ca}; \quad \underline{I}_B = \underline{I}_{bc} - \underline{I}_{ab}; \quad \underline{I}_C = \underline{I}_{ca} - \underline{I}_{bc} \quad (1.21)$$

При симметричной нагрузке $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca} = \underline{Z}_p = \underline{Z}_p e^{j\varphi}$ фазные токи смещены относительно фазных напряжений на одинаковый угол φ (рис. 1.7, б). Подставим в первое уравнение (1.21) фазные токи из (1.20)

$$\underline{I}_A = (\underline{U}_{AB} - \underline{U}_{CA}) / \underline{Z}_p.$$

Тогда, с учётом того, что $\underline{U}_{AB} = U_l e^{j30^\circ} = U_l \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right); \quad \underline{U}_{CA} = U_l e^{j150^\circ} = U_l \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right)$ получим:

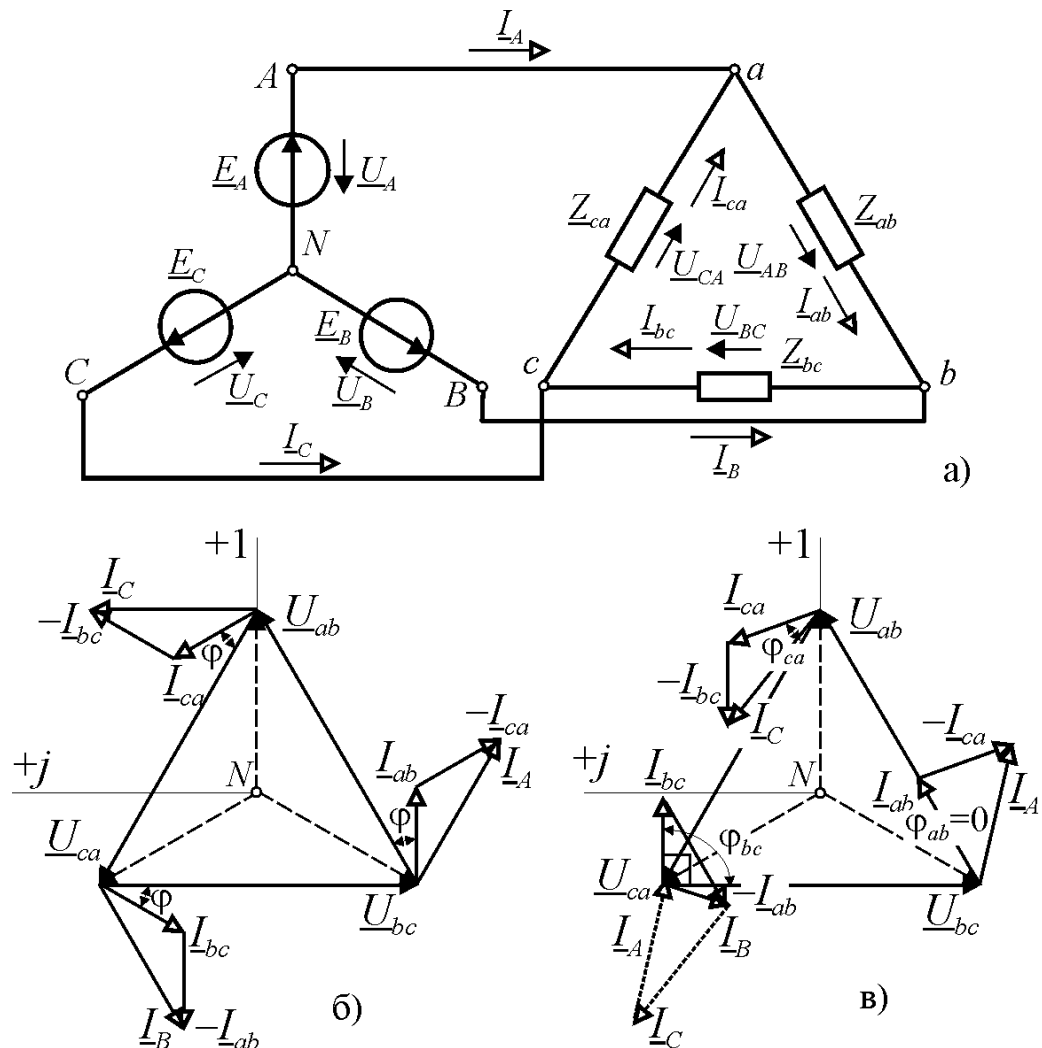


Рис. 1.7

$$I_A = I_l = U_l \sqrt{3} / Z_p = I_p \sqrt{3}, \quad (1.22)$$

т.е. при симметричной нагрузке соединённой треугольником линейные токи в трёхфазной цепи в $\sqrt{3}$ раз больше фазных.

В случае несимметричной нагрузки уравнения (1.20)-(1.21) остаются в силе, но расчёты по ним нужно вести для конкретных параметров.

В общем виде амплитудные и фазовые соотношения можно проследить на векторных диаграммах рис. 1.7. При симметричной активно-индуктивной нагрузке (рис. 1.7, б) векторы фазных токов $\underline{I}_{ab}, \underline{I}_{bc}, \underline{I}_{ca}$ смещены относительно векторов фазных напряжений $\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ на угол φ . Векторы линейных токов $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ строятся в соответствии с выражениями (1.21) и образуют симметричную систему.

Пример векторных диаграмм для активной, активно-индуктивной и ёмкостной нагрузки фаз ab, bc и ca соответственно приведён на рис. 1.7, в. Векторы фазных токов $\underline{I}_{ab}, \underline{I}_{bc}, \underline{I}_{ca}$ построены по отношению к векторам фазных напряжений $\underline{U}_{ab}, \underline{U}_{bc}, \underline{U}_{ca}$ в соответствии с характером нагрузки. После чего построены векторы линейных токов $\underline{I}_A, \underline{I}_B, \underline{I}_C$ в соответствии с выражениями (1.21). В точке c штриховыми линиями показан треугольник линейных токов, иллюстрирующий выполнение условия (1.16) в трёхпроводной сети.

Так как в случае соединения треугольником напряжения на фазах нагрузки равны линейным напряжениям генератора и не зависят от напряжений других фаз, то изменение режима работы любой фазы не оказывает влияния на другие.

1.6. Мощность трёхфазной нагрузки

Каждая фаза нагрузки представляет собой отдельный элемент электрической цепи, в котором происходит преобразование энергии или её обмен с источником питания. Поэтому активная и реактивная мощности трёхфазной цепи равны суммам мощностей отдельных фаз:

$$P = P_a + P_b + P_c; \quad Q = Q_a + Q_b + Q_c \quad - \text{ для соединения звездой};$$

$$P = P_{ab} + P_{bc} + P_{ca}; \quad Q = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{ca} - \text{ для соединения треугольником}.$$

Активная и реактивная мощности каждой фазы определяются так же, как в однофазной цепи:

$$P_p = U_p I_p \cos \varphi_p = R_p I_p^2; \quad Q_p = U_p I_p \sin \varphi_p = X_p I_p^2. \quad (1.23)$$

Полная мощность трёхфазной цепи равна:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2},$$

причём $S \neq S_a + S_b + S_c$; $S \neq S_{ab} + S_{bc} + S_{ca}$.

Полную мощность можно представить также в комплексной форме. Например, для соединения нагрузки звездой:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= P + jQ = (P_a + P_b + P_c) + j(Q_a + Q_b + Q_c) = \\ &= \underline{S}_a + \underline{S}_b + \underline{S}_c = \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* \end{aligned} \quad (1.24)$$

При симметричной нагрузке мощности всех фаз одинаковы, поэтому её можно определить, умножив на три выражения (1.23):

$$\begin{aligned} P &= 3P_p = 3U_p I_p \cos \varphi_p = 3R_p I_p^2; \\ Q &= 3Q_p = 3U_p I_p \sin \varphi_p = 3X_p I_p^2; \\ S &= 3S_p = 3U_p I_p. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Фазные токи и напряжения в (1.25) можно выразить через линейные с учётом того, что при симметричной нагрузке и соединении её звездой $U_p = U_l / \sqrt{3}$; $I_p = I_l$, а при соединении треугольником – $U_p = U_l$; $I_p = I_l / \sqrt{3}$. Подставляя эти соотношения в (1.25), мы получим для обеих схем соединения одинаковые выражения для мощности:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{3} U_l I_l \cos \varphi_p; \quad Q = \sqrt{3} U_l I_l \sin \varphi_p; \\ S &= \sqrt{3} U_l I_l. \end{aligned} \quad (1.26)$$

1.7. Измерение мощности трёхфазной цепи методом двух ваттметров

Рассмотрим вопрос измерения мощности трёхфазной цепи без нейтрального провода. Пусть нагрузка и питающая её сеть несимметричны. Пользуясь соотношениями (1.12) и (1.20) между фазными и линейными величинами, определим с учётом цифровых индексов линейные напряжения для нагрузки, соединённой звездой, и токи для нагрузки, соединённой треугольником, как

$$u_{12} = u_1 - u_2; u_{23} = u_2 - u_3 = -u_{32}; u_{31} = u_3 - u_1; \quad (1.27)$$

$$i_1 = i_{12} - i_{31}; i_2 = i_{23} - i_{12}; i_3 = i_{31} - i_{23}. \quad (1.28)$$

Суммарная мгновенная мощность, измеряемая двумя ваттметрами на рис. 1.8, а, равна

$$P = P_1 + P_2 = u_{12}i_1 + u_{32}i_3 \quad (1.29)$$

Подставляя (1.27) в (1.29) с учётом отсутствия нейтрального провода, т.е. с учётом $i_1 + i_2 + i_3 = 0 \Rightarrow i_1 + i_3 = -i_2$, получим

$$\begin{aligned} P &= (u_1 - u_2)i_1 + (u_3 - u_2)i_3 = u_1i_1 - u_2i_1 + u_3i_3 - u_2i_3 = \\ &= u_1i_1 - u_2(i_1 + i_3) + u_3i_3 = u_1i_1 + u_2i_2 + u_3i_3 = p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned}$$

Следовательно, сумма показаний ваттметров равна сумме мощностей фаз нагрузки, соединённой звездой.

Подставим теперь в (1.29) соотношения (1.28) с учетом того, что для линейных напряжений справедливо $u_{12} + u_{23} + u_{31} = 0 \Rightarrow u_{12} + u_{23} = -u_{31}$:

$$\begin{aligned} P &= u_{12}(i_{12} - i_{31}) + u_{32}(i_{31} - i_{23}) = u_{12}i_{12} - u_{12}i_{31} + u_{32}i_{31} - u_{32}i_{23} = \\ &= u_{12}i_{12} + u_{23}i_{23} - (u_{12} + u_{23})i_{31} = u_{12}i_{12} + u_{23}i_{23} + u_{31}i_{31} = p_{12} + p_{23} + p_{31} \end{aligned}$$

Таким образом, и в случае соединения нагрузки треугольником сумма показаний ваттметров равна сумме мощностей фаз нагрузки.

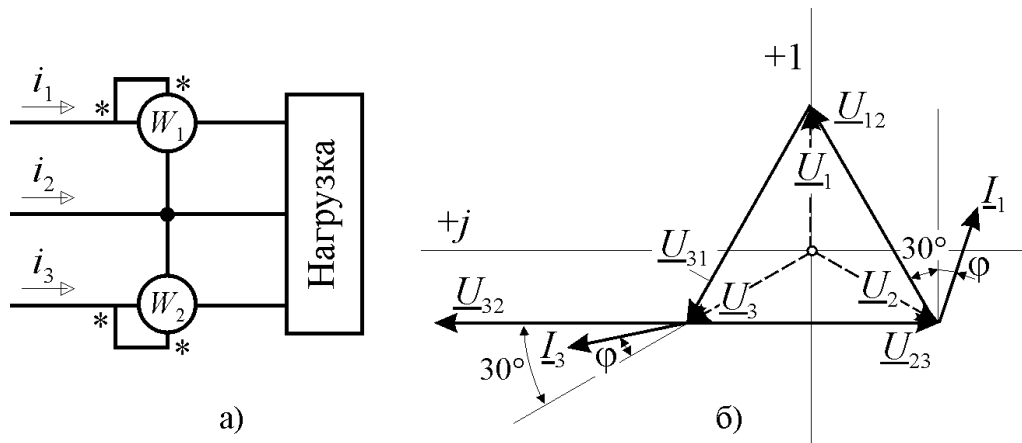


Рис. 1.8

При симметричной нагрузке показания ваттметров позволяют определить фазовый сдвиг тока относительно напряжения. На рис. 1.8, б приведена векторная диаграмма для этого случая. С её помощью можно определить показания ваттметров:

$$\begin{aligned} P_1 &= U_{12} I_1 \cos(U_{12} I_1) = UI \cos(30^\circ + \varphi); \\ P_2 &= U_{32} I_3 \cos(U_{32} I_3) = UI \cos(30^\circ - \varphi). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Отсюда сумма и разность показаний ваттметров равны

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= UI [\cos(30^\circ + \varphi) + \cos(30^\circ - \varphi)] = UI \cdot 2 \cos \varphi \cos 30^\circ = \sqrt{3} UI \cos \varphi; \\ P_1 - P_2 &= UI [\cos(30^\circ + \varphi) - \cos(30^\circ - \varphi)] = UI \cdot 2 \sin \varphi \cos 30^\circ = UI \sin \varphi, \end{aligned}$$

а из их отношения можно найти угол φ как

$$\frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2} = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{3} \frac{P_1 - P_2}{P_1 + P_2}.$$

Из выражений (1.30) следует, что показания ваттметров всегда различны, за исключением чисто активной нагрузки ($\varphi = 0$). Причём, при активно-индуктивной нагрузке, когда $\varphi > 60^\circ$, показания первого ваттметра становятся отрицательными и результирующая мощность должна определяться с учётом знака, т.е. как разность показаний. Аналогичная картина будет, если нагрузка активно-ёмкостная и $\varphi < -60^\circ$. Тогда отрицательными будут показания второго ваттметра.

1.8. Высшие гармоники в многофазных системах

Нелинейные элементы электрических цепей и электромашинные генераторы с несинусоидальным распределением индукции возбуждают в многофазных системах токи и ЭДС, содержащие высшие гармоники. Пусть образующие m -фазную систему ЭДС одинаковы и смещены относительно друг друга на угол $2\pi/m$. В этом случае *все гармоники, порядок которых кратен числу фаз совпадают между собою по фазе*. Это объясняется тем, что для ν -й гармоники фазовый сдвиг равен $\nu 2\pi/m$, и если $\nu = n \cdot m$, то этот сдвиг равен целому n числу периодов, т.е. ν -е гармоники в соседних фазах смещены относительно друг друга на целое число периодов и, следовательно, совпадают по фазе. На рис. 1.9, а, где показаны первые четыре нечётные гармоники в двух соседних фазах трёхфазной системы, видно, что нулевые точки третьей гармоники совпадают. Гармоники некрatные трём смещены в соседних фазах на некоторый угол в разных направлениях. Так пятая гармоника смещена на угол α_5 в направлении противоположном смещению

первой гармоники α_1 , а седьмая смещена на угол α_7 в том же направлении, что и первая (рис. 1.9, а).

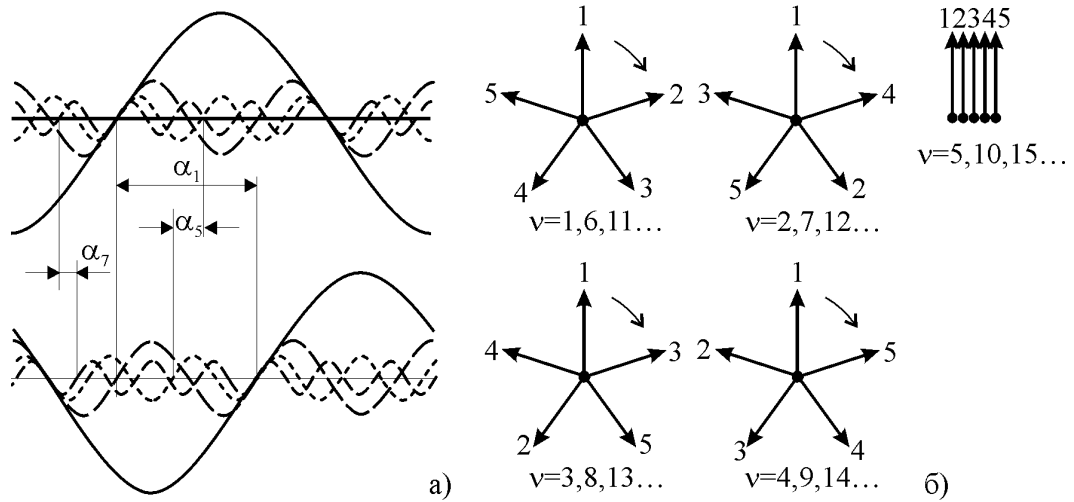


Рис. 1.9

Рассмотрим фазовые сдвиги высших гармоник для общего случая некоторой m -фазной системы ЭДС. Если фазовый сдвиг отсчитывать от первой фазы, то основная гармоника ЭДС k -й фазы будет равна

$$e_{1k} = E_1 \sin(\omega t - 2\pi k / m)$$

Величина углов для v -й гармоники в v раз больше, поэтому в k -й фазе она будет равна

$$e_{vk} = E_v \sin[v(\omega t - 2\pi k / m)] = E_v \sin(v\omega t - 2\pi kv / m).$$

Если при этом отношение $v/m = q$, где q – целое число, то аргументы синусных функций фазных ЭДС отличаются на целое число периодов 2π . Поэтому v -е гармоники всех ЭДС совпадают по фазе и образуют симметричную систему нулевого порядка.

Если порядок гармоники v не делится нацело на число фаз m , то фазовый сдвиг будет определяться кратностью фазового смещения q , которая для $v < m$ равна $q = v$, а для $v > m$ равна остатку от деления v/m , т.е. $1 \leq q \leq (m-1)$. Следовательно, если $v = m+1 \equiv q=1$, то v -я гармоника образует симметричную m -фазную систему с порядком чередования фаз, совпадающим с порядком чередования фаз основной гармоники. Если же $v = m-1 \equiv q=-1$, то порядок чередования фаз обратный по отношению к первой гармонике. Во всех остальных случаях порядок чередования фаз высших гармоник будет перемежающимся. На рис. 1.9, б в качестве примера показан порядок чередования фаз для различных гармоник пятифазной системы.

Таким образом, *все высшие гармоники образуют симметричные m-фазные системы с порядком чередования фаз, определяемым соотношением $v/m \equiv q$.*

Рассмотрим следствия, вытекающие из рассмотренных выше положений для случаев связывания многофазной системы многоугольником и звездой.

В случае связывания источников питания (обмоток трансформатора или генератора) многоугольником при отсутствии высших гармоник сумма ЭДС в контуре многоугольника равна нулю, если они образуют симметричную систему. Однако если ЭДС содержат высшие гармоники, то гармоники, порядок которых кратен числу фаз, образуют систему нулевого порядка и совпадают по фазе. Поэтому их сумма в контуре многоугольника не равна нулю, что вызовет протекание тока независимо от наличия или отсутствия нагрузки. Этот ток создаст падения напряжения в точности равные ЭДС, которые его вызывают, в результате чего напряжения на зажимах источников не будут иметь гармоник, кратных числу фаз. Гармоники не кратные числу фаз образуют симметричные системы ненулевого порядка и не создают тока в контуре многоугольника, т.к. их сумма вдоль контура. Однако они сохраняются на зажимах источника.

При связывании источников питания звездой линейные напряжения равны разности фазных напряжений. Поэтому гармоники нулевого порядка кратные числу фаз при вычитании дают нулевую разность и отсутствуют в линейных напряжениях. Гармоники, порядок которых отличается от числа фаз, не совпадают по фазе и сохраняются в линейных напряжениях источника.

В результате соотношение линейного и фазного напряжений в симметричных системах, связанных звездой и содержащих высшие гармоники, отличается от соотношения в системах, в которых высшие гармоники отсутствуют. Например, в трёхфазной системе величина линейного напряжения для любой гармоники, порядок которой не кратен трём, в $\sqrt{3}$ раз больше, чем величина фазного напряжения. В то же время кратные трём гармоники в линейном напряжении отсутствуют, поэтому соотношение линейного U_l и фазного напряжения U_p равно

$$\frac{U_l}{U_p} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{U_1^2 + 0 + U_5^2 + U_7^2 + 0 + U_{11}^2 + \dots}}{\sqrt{U_1^2 + U_3^2 + U_5^2 + U_7^2 + U_9^2 + U_{11}^2 + \dots}} < \sqrt{3}$$

где $U_1, U_3, U_5 \dots$ – действующие значения гармоник фазного напряжения.

Отсутствие в линейных напряжениях гармоник кратных числу фаз означает также, что кривые фазного и линейного напряжений отличаются друг от друга по форме.

Другим важным следствием, относящимся к системам, связанным звездой, является условие наличия тока в нейтральном проводе и напряжения между нейтральными точками источника и нагрузки при отсутствии связи между ними. В случае симметричной нагрузки и отсутствии высших гармоник ток в нейтральном проводе равен нулю. Однако *если в кривых тока есть высшие гармоники, кратные числу фаз m и образующие нулевую последовательность, то они создадут в нулевом проводе ток даже при полной симметрии нагрузки*, причём величина этого тока будет в m раз больше, чем в линейных проводах.

При отсутствии нейтрального провода гармоники тока кратные m в линейных проводах существовать не могут, но *между нейтральными точками источника и нагрузки имеются напряжения с частотами в $s \cdot m$ раз, где s – целое число, превосходящими частоту основной гармоники*, которые в некоторых случаях могут достигать опасных для людей и оборудования величин.

1.9. Метод симметричных составляющих

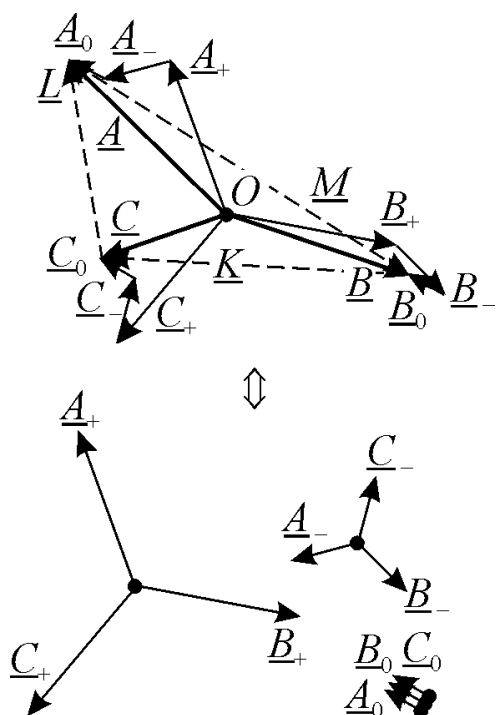


Рис. 1.10

Решение задач, связанных с симметричными многофазными цепями при симметричных системах напряжений или токов, сводится к расчёту состояния или параметров одной из фаз и производится методами расчёта однофазных цепей. Влияние взаимной индукции между фазами может быть учтено эквивалентными сопротивлениями самоиндукции, т.к. условия симметрии определяют величину и фазу токов в других фазах. Токи и напряжения в фазах, для которых расчёт не производится, равны по величине токам и напряжениям расчётной фазы, но смещены по отношению к ним на угол $2\pi/m$, где m – число фаз цепи.

При решении задач, связанных с несимметричными многофазными цепями или с симметричными цепями при воздействии на них несимметричных систем напряжений или токов, уже нет возможности использовать такие

упрощения, и требуется производить расчёт для всех элементов многофазной цепи.

1.9.1. Трёхфазные цепи

1.9.1.1. Преобразование к симметричным составляющим

В 1918 г. Фортеस्कью (*C.L. Fortescue*) показал, что любая несимметричная система может быть разложена на три симметричные системы с прямым, обратным и нулевым порядком чередования фаз.

Пусть дана несимметричная система фазных векторов $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ (рис. 1.10). Допустим, что каждый из этих векторов может быть представлен суммой трёх составляющих

$$\begin{aligned}\underline{A} &= \underline{A}_+ + \underline{A}_- + \underline{A}_0; \\ \underline{B} &= \underline{B}_+ + \underline{B}_- + \underline{B}_0; \\ \underline{C} &= \underline{C}_+ + \underline{C}_- + \underline{C}_0,\end{aligned}\tag{1.31}$$

которые образуют симметричные системы с прямым (+), обратным (−) и нулевым (0) порядком чередования фаз, т.е.

$$\begin{aligned}\underline{B}_+ &= \underline{A}_+ \cdot \underline{a}_3^2; \quad \underline{C}_+ = \underline{A}_+ \cdot \underline{a}_3; \\ \underline{B}_- &= \underline{A}_- \cdot \underline{a}_3; \quad \underline{C}_- = \underline{A}_- \cdot \underline{a}_3^2; \\ \underline{B}_0 &= \underline{C}_0 = \underline{A}_0\end{aligned}\tag{1.32}$$

где $\underline{a}_3 = e^{j2\pi/3}$ – оператор поворота трёхфазной системы (рис. 1.10).

Эти симметричные системы называются *симметричными составляющими* или симметричными координатами *несимметричной системы векторов* $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$. Если вектор $\underline{A}$, принять за основной вектор, то векторы $\underline{A}_+$, $\underline{A}_-$ и $\underline{A}_0$ называются основными симметричными векторами или симметричными составляющими, т.к. по ним с помощью соотношений (1.32) можно однозначно определить все три симметричные системы векторов.

Отношение амплитуды составляющей обратной последовательности к амплитуде прямой последовательности называется *коэффициентом асимметрии*.

$$k_a = |\underline{A}_-|/|\underline{A}_+|.$$

Подставим выражения (1.32) в уравнения (1.31) и запишем это преобразование в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}_3^2 & \underline{a}_3 & 1 \\ \underline{a}_3 & \underline{a}_3^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_+ \\ \underline{A}_- \\ \underline{A}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3 \begin{bmatrix} \underline{A}_+ \\ \underline{A}_- \\ \underline{A}_0 \end{bmatrix} \quad (1.33)$$

Матрица $\mathbf{S}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \underline{a}_3^2 & \underline{a}_3 & 1 \\ \underline{a}_3 & \underline{a}_3^2 & 1 \end{bmatrix}$ этого преобразования квадратная и её

определитель отличен от нуля ($\Delta = j3\sqrt{3} \neq 0$). Следовательно, представление векторов $\underline{A}$, $\underline{B}$ и $\underline{C}$ через симметричные составляющие $\underline{A}_+$, $\underline{A}_-$ и $\underline{A}_0$ всегда возможно и притом единственным способом.

Выполним элементарные преобразования системы уравнений (1.33) умножая второе и третье уравнения на $\underline{a}_3$ и $\underline{a}_3^2$, а затем на $\underline{a}_3^2$ и $\underline{a}_3$, после чего сложим уравнения исходной и двух эквивалентных систем с учётом того, что $\underline{a}_3^3 = 1$ и $1 + \underline{a}_3 + \underline{a}_3^2 = 0$. В результате мы получим выражения для основных векторов симметричных составляющих:

$$\begin{array}{lll} \underline{A} = \cancel{\underline{A}_+} + \cancel{\underline{A}_-} + \underline{A}_0 & \underline{A} = \underline{A}_+ + \cancel{\underline{A}_-} + \cancel{\underline{A}_0} & \underline{A} = \cancel{\underline{A}_+} + \underline{A}_- + \cancel{\underline{A}_0} \\ + \underline{B} = \underline{a}_3^2 \cancel{\underline{A}_+} + \underline{a}_3 \cancel{\underline{A}_-} + \underline{A}_0 & + \underline{a}_3 \underline{B} = \underline{A}_+ + \underline{a}_3^2 \cancel{\underline{A}_-} + \underline{a}_3 \cancel{\underline{A}_0} & + \underline{a}_3^2 \underline{B} = \underline{a}_3 \underline{A}_+ + \underline{A}_- + \underline{a}_3^2 \underline{A}_0 \\ \underline{C} = \cancel{\underline{a}_3 \underline{A}_+} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{A}_-} + \underline{A}_0 & \underline{a}_3^2 \underline{C} = \underline{A}_+ + \cancel{\underline{a}_3 \underline{A}_-} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{A}_0} & \underline{a}_3 \underline{C} = \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{A}_+} + \underline{A}_- + \cancel{\underline{a}_3 \underline{A}_0} \\ \hline \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} = 3\underline{A}_0 & \underline{A} + \underline{a}_3 \underline{B} + \underline{a}_3^2 \underline{C} = 3\underline{A}_+ & \underline{A} + \underline{a}_3^2 \underline{B} + \underline{a}_3 \underline{C} = 3\underline{A}_- \\ \underline{A}_0 = (\underline{A} + \underline{B} + \underline{C})/3 & \underline{A}_+ = (\underline{A} + \underline{a}_3 \underline{B} + \underline{a}_3^2 \underline{C})/3 & \underline{A}_- = (\underline{A} + \underline{a}_3^2 \underline{B} + \underline{a}_3 \underline{C})/3 \end{array} \quad (1.34)$$

Этот же результат можно получить вычислением обратной матрицы

$$\mathbf{S}_3^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a}_3 & \underline{a}_3^2 \\ 1 & \underline{a}_3^2 & \underline{a}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Тогда разложение системы векторов } \underline{A}, \underline{B} \text{ и } \underline{C} \text{ на}$$

симметричные составляющие будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_+ \\ \underline{A}_- \\ \underline{A}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & \underline{a}_3 & \underline{a}_3^2 \\ 1 & \underline{a}_3^2 & \underline{a}_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{C} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3^{-1} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{C} \end{bmatrix}$$

Определим для несимметричной системы фазных векторов $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ линейные векторы $\underline{K}, \underline{L}, \underline{M}$ (рис. 1.10) в соответствии с уравнениями

$$\underline{K} = \underline{C} - \underline{B}; \quad \underline{L} = \underline{A} - \underline{C}; \quad \underline{M} = \underline{B} - \underline{A} \quad (1.35)$$

или в виде линейного преобразования

$$\begin{bmatrix} \underline{K} \\ \underline{L} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{C} \end{bmatrix} \quad (1.36)$$

Прибавляя ко второй строке третью, а затем к первой новую вторую строку, получим определитель системы (1.36)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, матрица преобразования (1.36) является вырожденной. Её ранг можно определить методом окаймляющих миноров, начав, например, из левого нижнего угла. Так как, по крайней мере, один окаймляющий минор второго порядка отличен от нуля, а единственный минор третьего порядка равен нулю, то ранг матрицы $r=2$. Ранг преобразованной расширенной матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \underline{A} + \underline{B} + \underline{C} \\ 0 & 1 & -1 & \underline{B} + \underline{C} \\ -1 & 1 & 0 & \underline{C} \end{bmatrix}$$

также равен двум, поэтому в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли система уравнений (1.36) совместна, но имеет бесконечное множество решений, т.к. ранг матрицы меньше её размера ($n=3$). Если в качестве базисного минора выбрать, например,

$$m_b = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

то базисными переменными будут векторы $\underline{B}$ и $\underline{C}$, а система уравнений

$$\begin{bmatrix} \underline{L} \\ \underline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \\ \underline{C} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \underline{C} = \underline{A} - \underline{L} \\ \underline{B} = \underline{A} + \underline{M} \end{matrix} \quad (1.37)$$

будет равносильна системе (1.36). Действительно, при любом произвольном значении вектора $\underline{A}$ и заданных значениях линейных векторов $\underline{L}$ и $\underline{M}$ фазные векторы $\underline{B}$ и $\underline{C}$, рассчитанные по выражениям (1.37), обеспечивают выполнение необходимого для линейных векторов условия

$$\underline{K} = \underline{C} - \underline{B} = \underline{A} - \underline{L} - \underline{A} - \underline{M} = -\underline{L} - \underline{M} \Leftrightarrow \underline{K} + \underline{L} + \underline{M} = 0.$$

Задание вектора $\underline{A}$ по существу определяет положение точки O на плоскости комплексных чисел (рис. 1.10), из которой затем строятся фазные векторы $\underline{B}$ и $\underline{C}$ в точки конца вектора $\underline{M}$ и начала вектора $\underline{L}$.

Таким образом, мы получили известный из теории многофазных систем вывод о том, что *любой системе линейных векторов соответствует бесконечное множество систем фазных векторов.*

Пользуясь выражениями (1.35), заменим в выражениях (1.34) для составляющих прямой и обратной последовательности $\underline{A}$ на $\underline{B} - \underline{M}$, а $\underline{C}$ на $\underline{B} + \underline{K}$. Тогда

$$\begin{aligned} \underline{A}_+ &= (\underline{A} + \underline{a}_3 \underline{B} + \underline{a}_3^2 \underline{C})/3 = (\underline{B} - \underline{M} + \underline{a}_3 \underline{B} + \underline{a}_3^2 \underline{B} + \underline{a}_3^2 \underline{K})/3 = (\underline{a}_3^2 \underline{K} - \underline{M})/3; \\ \underline{A}_- &= (\underline{A} + \underline{a}_3^2 \underline{B} + \underline{a}_3 \underline{C})/3 = (\underline{B} - \underline{M} + \underline{a}_3^2 \underline{B} + \underline{a}_3 \underline{B} + \underline{a}_3 \underline{K})/3 = (\underline{a}_3 \underline{K} - \underline{M})/3. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Отсюда следует, что *составляющие прямой и обратной последовательности определяются только системой линейных векторов и не зависят от фазных.* А т.к. любой системе линейных векторов соответствует бесконечное множество систем фазных векторов, но при этом составляющие прямой и обратной последовательности в этих системах будут одинаковыми, то *различаться они будут только нулевой составляющей.*

Следует заметить, что для симметричной системы линейных векторов $\underline{M} = \underline{a}_3 \underline{K}$ и, в соответствии с (1.38), составляющая обратной последовательности отсутствует ($\underline{A}_- = 0$), а составляющая системы прямой последовательности фазных векторов равна

$$\underline{A}_+ = (\underline{a}_3^2 \underline{K} - \underline{M})/3 = (\underline{a}_3^2 - \underline{a}_3) \underline{K}/3 = -j \underline{K} / \sqrt{3}.$$

1.9.1.2. Мощность, выраженная через симметричные составляющие

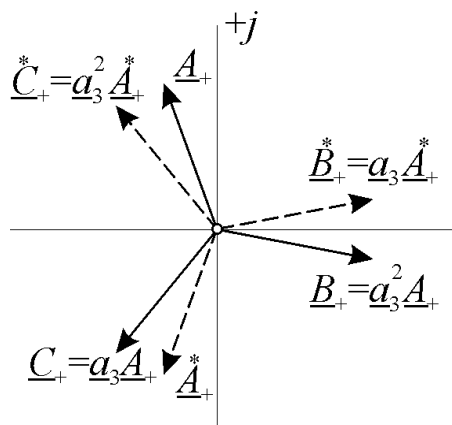


Рис. 1.11

В соответствии с выражением (1.24) комплексную полную мощность трёхфазной цепи можно выразить через фазные величины как

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^*$$

Каждый элемент слагаемых правой части этого уравнения можно представить через основные векторы симметричных составляющих напряжений и токов с учётом того, что у комплексно-сопряжённой системы векторов порядок чередования фаз противоположный (см. рис. 1.11). Тогда комплексная полная мощность будет равна

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* + \underline{U}_c \underline{I}_c^* = (\underline{U}_+ + \underline{U}_- + \underline{U}_0) \left(\underline{I}_+^* + \underline{I}_-^* + \underline{I}_0^* \right) + \\ &+ \left(\underline{a}_3^2 \underline{U}_+ + \underline{a}_3 \underline{U}_- + \underline{U}_0 \right) \left(\underline{a}_3 \underline{I}_+^* + \underline{a}_3^2 \underline{I}_-^* + \underline{I}_0^* \right) + \left(\underline{a}_3 \underline{U}_+ + \underline{a}_3^2 \underline{U}_- + \underline{U}_0 \right) \left(\underline{a}_3^2 \underline{I}_+^* + \underline{a}_3 \underline{I}_-^* + \underline{I}_0^* \right) = \\ &= \underline{U}_+ \underline{I}_+^* + \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_-^*} + \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_0^*} + \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_+^*} + \underline{U}_- \underline{I}_-^* + \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_0^*} + \cancel{\underline{U}_0 \underline{I}_+^*} + \cancel{\underline{U}_0 \underline{I}_-^*} + \underline{U}_0 \underline{I}_0^* + \\ &+ \underline{U}_+ \underline{I}_+^* + \underline{a}_3 \underline{U}_+ \underline{I}_-^* + \underline{a}_3^2 \underline{U}_+ \underline{I}_0^* + \underline{a}_3^2 \underline{U}_- \underline{I}_+^* + \underline{U}_- \underline{I}_-^* + \underline{a}_3 \underline{U}_- \underline{I}_0^* + \underline{a}_3 \underline{U}_0 \underline{I}_+^* + \underline{a}_3^2 \underline{U}_0 \underline{I}_-^* + \underline{U}_0 \underline{I}_0^* + \\ &+ \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_+^*} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_+ \underline{I}_-^*} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_+ \underline{I}_0^*} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_- \underline{I}_+^*} + \underline{U}_- \underline{I}_-^* + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_- \underline{I}_0^*} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_0 \underline{I}_+^*} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_0 \underline{I}_-^*} + \underline{U}_0 \underline{I}_0^* = \\ &= 3 \left(\underline{U}_+ \underline{I}_+^* + \underline{U}_- \underline{I}_-^* + \underline{U}_0 \underline{I}_0^* \right) = 3(\underline{S}_+ + \underline{S}_- + \underline{S}_0) \end{aligned}$$

$$\underline{S}_+ = \underline{U}_+ \underline{I}_+^* = P_+ + jQ_+ = U_+ I_+ \cos \varphi_+ + jU_+ I_+ \sin \varphi_+;$$

где: $\underline{S}_- = \underline{U}_- \underline{I}_-^* = P_- + jQ_- = U_- I_- \cos \varphi_- + jU_- I_- \sin \varphi_-$; — полные комплексные

$$\underline{S}_0 = \underline{U}_0 \underline{I}_0^* = P_0 + jQ_0 = U_0 I_0 \cos \varphi_0 + jU_0 I_0 \sin \varphi_0$$

мощности симметричных составляющих одной фазы цепи; φ_+ , φ_- , φ_0 — углы фазового сдвига соответствующих симметричных составляющих тока относительно составляющих напряжения.

Таким образом, активную и реактивную мощности трёхфазной системы можно определить с помощью фазных симметричных составляющих напряжения и тока как

$$P = \text{Re}[\underline{S}] = 3(P_+ + P_- + P_0) = 3(U_+ I_+ \cos \varphi_+ + U_- I_- \cos \varphi_- + U_0 I_0 \cos \varphi_0);$$

$$Q = \text{Im}[\underline{S}] = 3(Q_+ + Q_- + Q_0) = 3(U_+ I_+ \sin \varphi_+ + U_- I_- \sin \varphi_- + U_0 I_0 \sin \varphi_0).$$

1.9.1.3. Условие уравновешенности

Несмотря на то, что любая однофазная система является неуравновешенной, совокупность трёх фаз при определённых условиях может быть в уравновешенном состоянии, т.е. суммарная мгновенная мощность системы может быть постоянной величиной.

Если напряжение и ток в одной фазе нагрузки равны $u = U_m \sin(\omega t + \phi_u)$ и $i = I_m \sin(\omega t + \phi_i)$, то мгновенная мощность равна

$$p = ui = U_m \sin(\omega t + \phi_u) \cdot I_m \sin(\omega t + \phi_i) = \\ UI[\cos \varphi - \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i)] = P + \dot{I}$$

где $\dot{I} = UI \cos(2\omega t + \phi_u + \phi_i) = UI \sin(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \pi/2)$ – переменная составляющая мгновенной мощности, называемая пульсирующей мощностью. Так как пульсирующая мощность является синусоидальной функцией, изменяющейся с двойной частотой, то её можно изобразить комплексным числом

$$UIe^{j(2\omega t + \phi_u + \phi_i - \pi/2)} = \underline{\dot{I}} e^{j(2\omega t - \pi/2)},$$

где $\underline{\dot{I}} = UIe^{j(\phi_u + \phi_i)} = Ue^{j\phi_u} Ie^{j\phi_i} = \underline{U} \underline{I}$ – комплексная амплитуда пульсирующей мощности.

Пульсирующая мощность трёх фаз равна сумме мощностей в отдельных фазах:

$$\begin{aligned} \underline{\dot{I}}_{\Sigma} &= \underline{U}_a \underline{I}_a + \underline{U}_b \underline{I}_b + \underline{U}_c \underline{I}_c = (\underline{U}_+ + \underline{U}_- + \underline{U}_0)(\underline{I}_+ + \underline{I}_- + \underline{I}_0) + \\ &+ (\underline{a}_3^2 \underline{U}_+ + \underline{a}_3 \underline{U}_- + \underline{U}_0)(\underline{a}_3^2 \underline{I}_+ + \underline{a}_3 \underline{I}_- + \underline{I}_0) + (\underline{a}_3 \underline{U}_+ + \underline{a}_3^2 \underline{U}_- + \underline{U}_0)(\underline{a}_3 \underline{I}_+ + \underline{a}_3^2 \underline{I}_- + \underline{I}_0) = \\ &= \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_+} + \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_-} + \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_0} + \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_+} + \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_-} + \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_0} + \cancel{\underline{U}_0 \underline{I}_+} + \cancel{\underline{U}_0 \underline{I}_-} + \underline{U}_0 \underline{I}_0 + \\ &+ \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_+ \underline{I}_+} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_+ \underline{I}_-} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_+ \underline{I}_0} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_- \underline{I}_+} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_- \underline{I}_-} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_- \underline{I}_0} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_0 \underline{I}_+} + \cancel{\underline{a}_3^2 \underline{U}_0 \underline{I}_-} + \underline{U}_0 \underline{I}_0 + \\ &+ \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_+ \underline{I}_+} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_+ \underline{I}_-} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_+ \underline{I}_0} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_- \underline{I}_+} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_- \underline{I}_-} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_- \underline{I}_0} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_0 \underline{I}_+} + \cancel{\underline{a}_3 \underline{U}_0 \underline{I}_-} + \underline{U}_0 \underline{I}_0 = \\ &= 3(\underline{U}_+ \underline{I}_- + \underline{U}_- \underline{I}_+ + \underline{U}_0 \underline{I}_0) \end{aligned}$$

Отсюда мы получим *условие уравновешенности трёхфазной системы*, представленное через симметричные составляющие

$$\underline{\dot{I}}_{\Sigma} = 0 \Rightarrow \underline{U}_+ \underline{I}_- + \underline{U}_- \underline{I}_+ + \underline{U}_0 \underline{I}_0 = 0 \quad (1.39)$$

Этот результат соответствует общему условию уравниваемости многофазных систем*. Если трёхфазные системы напряжений и токов симметричны и имеют одинаковый порядок чередования фаз, т.е. если

$$\begin{aligned}\underline{U}_- = 0 \wedge \underline{I}_- = 0 \wedge (\underline{U}_0 = 0 \vee \underline{I}_0 = 0) &\Rightarrow \ddot{\underline{I}}_{\Sigma} = 0 && \text{или} \\ \underline{U}_+ = 0 \wedge \underline{I}_+ = 0 \wedge (\underline{U}_0 = 0 \vee \underline{I}_0 = 0) &\Rightarrow \ddot{\underline{I}}_{\Sigma} = 0,\end{aligned}$$

то такие системы будут уравновешенны.

Следует обратить внимание, что необходимым условием уравниваемости системы является отсутствие нулевой составляющей напряжения или тока.

1.9.1.4. Закон Ома для симметричных составляющих

Рассмотрим соотношение симметричных составляющих напряжения и тока в несимметричных трёхфазных цепях.

Пусть в трёхфазной цепи, соединённой звездой с нулевым проводом (рис. 1.3) через фазные сопротивления $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$ протекают токи $\underline{I}_a; \underline{I}_b; \underline{I}_c$, которые можно разложить на симметричные составляющие, приняв за базовые векторы составляющие тока фазы a :

$$\left. \begin{aligned}\underline{I}_a &= \underline{I}_+ + \underline{I}_- + \underline{I}_0 \\ \underline{I}_b &= \underline{a}_3^2 \underline{I}_+ + \underline{a}_3 \underline{I}_- + \underline{I}_0 \\ \underline{I}_c &= \underline{a}_3 \underline{I}_+ + \underline{a}_3^2 \underline{I}_- + \underline{I}_0\end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_a \\ \underline{I}_b \\ \underline{I}_c \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3 \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix}$$

Тогда в соответствии с законом Ома падения напряжения на фазных сопротивлениях будут равны

$$\left. \begin{aligned}\underline{U}_a &= \underline{Z}_a \underline{I}_a = \underline{Z}_a \underline{I}_+ + \underline{Z}_a \underline{I}_- + \underline{Z}_a \underline{I}_0 \\ \underline{U}_b &= \underline{Z}_b \underline{I}_b = \underline{a}_3^2 \underline{Z}_b \underline{I}_+ + \underline{a}_3 \underline{Z}_b \underline{I}_- + \underline{Z}_b \underline{I}_0 \\ \underline{U}_c &= \underline{Z}_c \underline{I}_c = \underline{a}_3 \underline{Z}_c \underline{I}_+ + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_c \underline{I}_- + \underline{Z}_c \underline{I}_0\end{aligned} \right\} \quad (1.40)$$

Эти напряжения можно также разложить на симметричные составляющие:

$$\left. \begin{aligned}\underline{U}_+ &= (\underline{U}_a + \underline{a}_3 \underline{U}_b + \underline{a}_3^2 \underline{U}_c) / 3 \\ \underline{U}_- &= (\underline{U}_a + \underline{a}_3^2 \underline{U}_b + \underline{a}_3 \underline{U}_c) / 3 \\ \underline{U}_0 &= (\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c) / 3\end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \\ \underline{U}_c \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

* см. раздел 1.4

Подставляя в (1.41) выражения (1.40), получим

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_+ &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \underline{Z}_c)\underline{I}_+ + \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_b + \underline{a}_3 \underline{Z}_c)\underline{I}_- + \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{a}_3 \underline{Z}_b + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_c)\underline{I}_0 \\ \underline{U}_- &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{a}_3 \underline{Z}_b + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_c)\underline{I}_+ + \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \underline{Z}_c)\underline{I}_- + \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_b + \underline{a}_3 \underline{Z}_c)\underline{I}_0 \\ \underline{U}_0 &= \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_b + \underline{a}_3 \underline{Z}_c)\underline{I}_+ + \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{a}_3 \underline{Z}_b + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_c)\underline{I}_- + \frac{1}{3}(\underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \underline{Z}_c)\underline{I}_0 \end{aligned} \right\} \quad (1.42)$$

Коэффициенты при симметричных составляющих тока в выражениях (1.42) представляют собой составляющие сопротивлений прямой, обратной и нулевой последовательности, аналогичные по форме составляющим напряжений и токов:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_+ &= (\underline{Z}_a + \underline{a}_3 \underline{Z}_b + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_c)/3 \\ \underline{Z}_- &= (\underline{Z}_a + \underline{a}_3^2 \underline{Z}_b + \underline{a}_3 \underline{Z}_c)/3 \\ \underline{Z}_0 &= (\underline{Z}_a + \underline{Z}_b + \underline{Z}_c)/3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{Z}_+ \\ \underline{Z}_- \\ \underline{Z}_0 \end{bmatrix} = \mathbf{S}_3^{-1} \begin{bmatrix} \underline{Z}_a \\ \underline{Z}_b \\ \underline{Z}_c \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

Используя выражения (1.43), можно представить симметричные составляющие напряжения (1.42) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_+ &= \underline{Z}_0 \underline{I}_+ + \underline{Z}_- \underline{I}_- + \underline{Z}_+ \underline{I}_0; \\ \underline{U}_- &= \underline{Z}_+ \underline{I}_+ + \underline{Z}_0 \underline{I}_- + \underline{Z}_- \underline{I}_0; \\ \underline{U}_0 &= \underline{Z}_- \underline{I}_+ + \underline{Z}_+ \underline{I}_- + \underline{Z}_0 \underline{I}_0. \end{aligned} \right\} \quad (1.44)$$

Из выражений (1.44) следует, что в общем случае каждая составляющая фазного тока создаёт падения напряжения всех трёх последовательностей.

Уравнения (1.44) можно представить в матричной записи:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_0 & \underline{Z}_- & \underline{Z}_+ \\ \underline{Z}_+ & \underline{Z}_0 & \underline{Z}_- \\ \underline{Z}_- & \underline{Z}_+ & \underline{Z}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{Z}\mathbf{I} \quad (1.45)$$

имеющей форму закона Ома, где матрица сопротивлений

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{Z}_+ \\ \underline{Z}_+ & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z}_+ & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underline{Z}_- & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z}_- \\ \underline{Z}_- & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{Z}}_0 + \underline{\mathbf{Z}}_+ + \underline{\mathbf{Z}}_-$$

представляет собой сумму матриц составляющих нулевой, прямой и обратной последовательности.

Из уравнений (1.45) можно найти симметричные составляющие токов:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{U} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \underline{Z}_0^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_- & \underline{Z}_+^2 - \underline{Z}_- \underline{Z}_0 & \underline{Z}_-^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_-^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_- & \underline{Z}_+^2 - \underline{Z}_- \underline{Z}_0 \\ \underline{Z}_+^2 - \underline{Z}_- \underline{Z}_0 & \underline{Z}_-^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_0 & \underline{Z}_0^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix} \quad (1.46)$$

$$\Delta = \underline{Z}_+ (\underline{Z}_+^2 - \underline{Z}_- \underline{Z}_0) + \underline{Z}_- (\underline{Z}_-^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_0) + \underline{Z}_0 (\underline{Z}_0^2 - \underline{Z}_+ \underline{Z}_-)$$

В симметричной трёхфазной цепи $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c = \underline{Z}$. Тогда из (1.43) следует, что $\underline{Z}_0 = \underline{Z}$; $\underline{Z}_+ = \underline{Z}_- = 0$, т.е. в симметричной цепи есть только сопротивление нулевой последовательности. Подставляя эти сопротивления в уравнения (1.45) и (1.46), получим:

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_0 \mathbf{I} = \underline{Z} \mathbf{E} \mathbf{I} \Rightarrow \mathbf{I} = \mathbf{Z}_0^{-1} \mathbf{U} = \frac{1}{\underline{Z}} \mathbf{E} \mathbf{U},$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Таким образом, в симметричной трёхфазной цепи токи различной последовательности создают падения напряжения только той же последовательности. Иначе говоря, системы токов и напряжений разных последовательностей независимы друг от друга.

Электрические машины общепромышленного применения симметричны и обладают нулевыми сопротивлениями прямой и обратной последовательности, поэтому в них симметричные составляющие независимы. В статических цепях часто существует асимметрия фазных сопротивлений, приводящая к появлению взаимосвязи симметричных составляющих.

Если фазные сопротивления образуют сопротивление только прямой последовательности, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_a &= \underline{Z} \\ \underline{Z}_b &= \underline{a}_3^2 \underline{Z} \\ \underline{Z}_c &= \underline{a}_3 \underline{Z} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \underline{Z}_+ &= \underline{Z} \\ \underline{Z}_- &= 0 \\ \underline{Z}_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.47)$$

то уравнения (1.45) и (1.46) приобретают вид –

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \underline{Z} \\ \underline{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \underline{Z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{Z}_+ \mathbf{I};$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}_+^{-1} \mathbf{U} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix}$$

В этом случае, также как в случае нулевой последовательности сопротивления, каждая составляющая тока определяет только одну составляющую падения напряжения, однако *взаимосвязь составляющих тока и напряжения перекрёстная*. Ток нулевой последовательности определяет составляющую прямой последовательности напряжения; ток прямой последовательности – составляющую обратной последовательности напряжения, а ток обратной последовательности – нулевую составляющую напряжения.

Схожая картина будет и в случае, если сопротивления образуют только обратную последовательность:

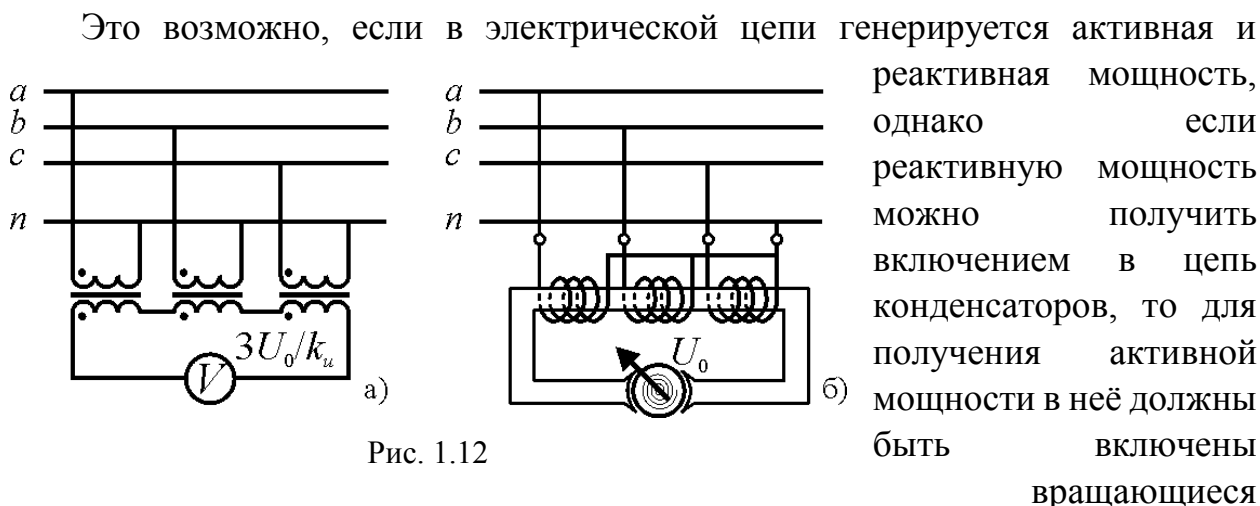
$$\begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{Z} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{Z} \\ \underline{Z} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{Z}_- \mathbf{I};$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}_-^{-1} \mathbf{U} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \\ \underline{I}_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \\ \underline{U}_0 \end{bmatrix}$$

Из выражений (1.47) следует, что для исключения сопротивлений нулевой и обратной последовательностей, т.е. для получения сопротивлений только прямой последовательности вида $\underline{Z}_+ = \underline{Z} = R + jX$, активные и реактивные сопротивления фаз b и c должны быть не только положительными, но и отрицательными

$$\underline{Z}_b = \underline{a}_3^2 \underline{Z} = \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (R + jX) = \left(-\frac{R}{2} + X \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j \left(-\frac{X}{2} - R \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\underline{Z}_c = \underline{a}^2 \underline{Z} = \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (R + jX) = \left(-\frac{R}{2} - X \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + j \left(-\frac{X}{2} + R \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$



электрические машины. Аналогичные условия необходимо выполнить также для исключения сопротивлений прямой и нулевой последовательностей и получения сопротивлений только обратной последовательности. Следовательно, *пассивные электрические цепи не могут иметь сопротивлений прямой и обратной последовательности.*

1.9.1.5. Измерение симметричных составляющих напряжения

Как было показано выше, асимметрия трёхфазной сети проявляется наличием составляющих обратной и нулевой последовательностей и является важным параметром, характеризующим состояние не только системы питания электрической машины, но также процессов в самой машине. Информация о степени асимметрии фазных напряжений и токов или о величине составляющей прямой последовательности во многих случаях позволяет организовать эффективное управление двигателем.

Симметричные составляющие различных последовательностей могут быть измерены также как любые другие величины – ток, напряжение, активная и реактивная мощности и т.д. Для этого можно использовать обычные приборы в сочетании с измерительными трансформаторами и пассивными элементами или специальные приборы, предназначенные для таких измерений.

В четырёхпроводной сети могут существовать все три составляющие напряжения и тока. В трёхпроводной сети напряжение нулевой последовательности является неопределённой величиной и не может быть измерено, а ток нулевой последовательности отсутствует.

При измерении нулевой составляющей напряжения используется её выражение через фазные напряжения

$$\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c = 3\underline{U}_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{U}_0 = (\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c)/3$$

Суммирование фазных напряжений можно осуществить с помощью трёх измерительных трансформаторов, вторичные обмотки которых соединены последовательно-согласно (рис. 1.12, а). В этом случае показания обычного вольтметра в цепи вторичных обмоток будут соответствовать тройному значению напряжения нулевой последовательности с учётом коэффициента трансформации $k_u = U_1/U_2$. Стандартом ГОСТ 23625-2001 на лабораторные измерительные трансформаторы для номинального первичного напряжения 220 В предусмотрен коэффициент трансформации $k_u = 3$, что позволяет получить значение напряжения нулевой последовательности в такой сети непосредственно по показаниям вольтметра V .

Нулевую составляющую напряжения можно также измерить с помощью вольтметра нулевой последовательности электромагнитного типа с замкнутым магнитопроводом. На этом магнитопроводе располагаются три одинаковые катушки, соединённые согласно (рис. 1.12, б). Магнитный поток, создаваемый каждой катушкой прибора с числом витков w при частоте сети ω без учёта потерь и потока рассеяния, определяется выражением

$$\hat{O} = -j\underline{U}/(\omega w).$$

Тогда суммарный поток трёх катушек подключённых к фазным напряжениям равен:

$$\hat{O}_\Sigma = \frac{-j}{\omega w}(\underline{U}_a + \underline{U}_b + \underline{U}_c) \equiv \underline{U}_0,$$

т.е. он пропорционален нулевой составляющей напряжения сети, в значениях которой градуируется шкала прибора.

Измерение составляющих прямой и обратной последовательностей также производится с помощью специальных вольтметров электромагнитного типа, аналогичных вольтметрам, используемым для измерения составляющей нулевой последовательности. В основе измерения лежат представления составляющих через фазные напряжения

$$\underline{U}_+ = (\underline{U}_a + \underline{a}_3 \underline{U}_b + \underline{a}_3^2 \underline{U}_c)/3 \text{ и} \quad (1.48)$$

$$\underline{U}_- = (\underline{U}_a + \underline{a}_3^2 \underline{U}_b + \underline{a}_3 \underline{U}_c)/3. \quad (1.64)$$

Отклонение стрелки прибора пропорционально магнитному потоку в сердечнике, который, в свою очередь, пропорционален МДС катушек, т.е.

$$\begin{aligned}\hat{O}_\Sigma \equiv \underline{F}_\Sigma &= w(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) = w(\underline{U}_a \underline{Y}_a + \underline{U}_b \underline{Y}_b + \underline{U}_c \underline{Y}_c) = \\ &= w \underline{Y}_a (\underline{U}_a + \underline{U}_b \underline{Y}_b / \underline{Y}_a + \underline{U}_c \underline{Y}_c / \underline{Y}_a),\end{aligned}\quad (1.50)$$

где $\underline{I}_a, \underline{I}_b, \underline{I}_c, \underline{Y}_a, \underline{Y}_b, \underline{Y}_c$ – комплексные токи в катушках, подключённых к соответствующим фазам сети, и комплексные проводимости цепей катушек.

Таким образом, для того, чтобы магнитный поток в приборе был пропорционален составляющей прямой последовательности (1.48), необходимо обеспечить выполнение условий

$$\begin{aligned}\underline{Y}_b / \underline{Y}_a &= \underline{a}_3 = e^{j2\pi/3} = (-1 + j\sqrt{3})/2; \\ \underline{Y}_c / \underline{Y}_a &= \underline{a}_3^2 = e^{-j2\pi/3} = (-1 - j\sqrt{3})/2.\end{aligned}\quad (1.51)$$

Но вещественная часть отношения проводимостей электрических цепей, состоящих из пассивных элементов, не может быть отрицательной, т.к., если $\underline{Y}_1 = Y_1 e^{\pm j\varphi_1}$; $0 < \varphi_1 < \pi/2$ и $\underline{Y}_2 = Y_2 e^{\pm j\varphi_2}$; $0 < \varphi_2 < \pi/2$, то $\underline{Y}_1 / \underline{Y}_2 = (Y_1 / Y_2) e^{j(\pm\varphi_1 \mp \varphi_2)}$, и при любых значениях φ_1 и φ_2 их сумма $\pm\varphi_1 \mp \varphi_2 < \pm\pi$, т.е. $\text{Re}(\underline{Y}_1 / \underline{Y}_2) > 0$.

Однако, выражения (1.48) можно преобразовать к виду

$$\underline{U}_+ = \left[\underline{U}_a + (-\underline{a}_3)(-\underline{U}_b) + (-\underline{a}_3^2)(-\underline{U}_c) \right] / 3 \quad \text{и} \quad (1.52)$$

$$\underline{U}_- = \left[\underline{U}_a + (-\underline{a}_3^2)(-\underline{U}_b) + (-\underline{a}_3)(-\underline{U}_c) \right] / 3. \quad (1.53)$$

Тогда, если поменять местами начала и концы катушек прибора, подключённых к фазам b и c , то выражение (1.50) преобразуется к виду

$$\hat{O}_\Sigma \equiv \underline{F}_\Sigma = w \underline{Y}_a (\underline{U}_a - \underline{U}_b \underline{Y}_b / \underline{Y}_a - \underline{U}_c \underline{Y}_c / \underline{Y}_a), \quad (1.54)$$

а условия пропорциональности магнитного потока составляющей прямой последовательности в соответствии с (1.52) – к виду

$$\begin{aligned}\underline{Y}_b / \underline{Y}_a &= -\underline{a}_3 = e^{j2\pi/3} e^{\pm j\pi} = e^{-j\pi/3} = (1 - j\sqrt{3})/2; \\ \underline{Y}_c / \underline{Y}_a &= -\underline{a}_3^2 = e^{-j2\pi/3} e^{\pm j\pi} = e^{j\pi/3} = (1 + j\sqrt{3})/2.\end{aligned}\quad (1.55)$$

Пренебрегая импедансом катушек прибора и полагая, что в цепь катушки фазы a включен последовательно высокоомный резистор R , т.е. $\underline{Y}_a \approx 1/R$, из условий (1.55) получим

$$\underline{Y}_b = \underline{Y}_a e^{-j\pi/3} = \frac{e^{-j\pi/3}}{R}; \quad \underline{Y}_c = \underline{Y}_a e^{j\pi/3} = \frac{e^{j\pi/3}}{R}$$

$\Downarrow$

$$\underline{Z}_{b+} = 1/\underline{Y}_b = Re^{j\pi/3} = R\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \quad \underline{Z}_{c+} = 1/\underline{Y}_c = Re^{-j\pi/3} = R\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(1.56)

Таким образом, для того, чтобы показания прибора соответствовали величине составляющей прямой последовательности U_+ необходимо в цепь катушки фазы b включить резистор с сопротивлением, равным половине сопротивления резистора катушки фазы a , и индуктивное сопротивление $X_L = \omega L = R\sqrt{3}/2$, а в цепь катушки фазы c – такой же резистор и конденсатор с ёмкостным сопротивлением $X_C = 1/\omega C = R\sqrt{3}/2$ (рис. 1.13, а).

Проделав аналогичные выкладки для составляющей обратной последовательности, мы получим комплексно сопряжённые значения дополнительных сопротивлений катушек фаз b и c –

$\underline{Z}_{b-}^* = \underline{Z}_{b+} = \underline{Z}_{c+}^*$; $\underline{Z}_{c-}^* = \underline{Z}_{c+} = \underline{Z}_{b+}^*$. Следовательно, одним и тем же вольтметром можно измерять прямую и обратную составляющую

напряжения в зависимости от того, в каком порядке подключены к сети его клеммы (рис. 1.13).

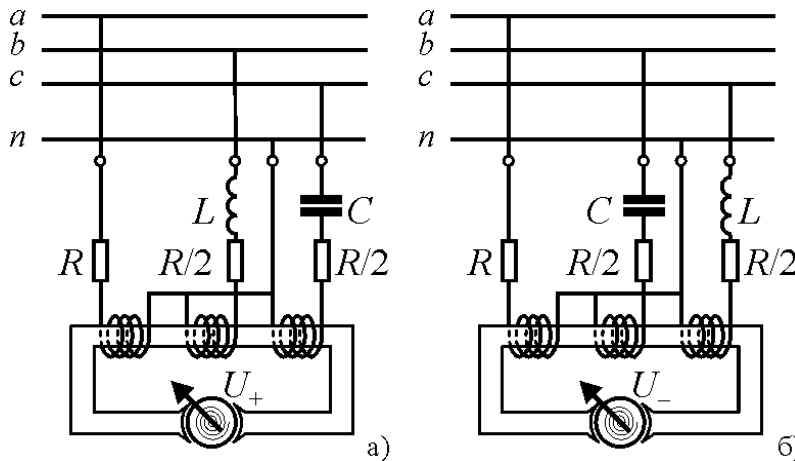


Рис. 1.13

1.9.1.6. Измерение симметричных составляющих тока

Симметричные составляющие токов в трёхфазных цепях можно

измерить теми же методами, какие используются для измерения составляющих напряжения.

В четырёхпроводной сети ток нулевой последовательности измеряют простым включением амперметра в нулевой провод (рис. 1.14, а). Однако если этот провод недоступен или если требуется исключить возможную погрешность измерения, связанную с токами утечки, то нулевую составляющую измеряют с помощью трёх измерительных трансформаторов

тока, включённых в линейные провода. Для осуществления суммирования в соответствии с выражением

$$\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c = 3\underline{I}_0 \Leftrightarrow \underline{I}_0 = (\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c)/3$$

вторичные обмотки трансформаторов соединяют параллельно-согласно и подключают к амперметру (рис. 1.14, а). В соответствии с ГОСТ 23624-2001 измерительные трансформаторы с номинальными токами кратными 3 и 15 А

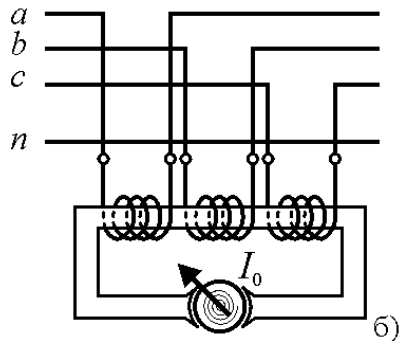
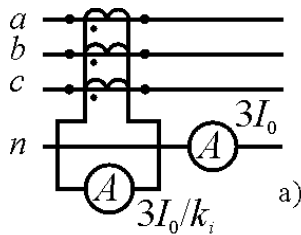


Рис. 1.14

системы с замкнутым магнитопроводом с тремя катушками, включаемыми в разрывы линейных проводов (рис. 1.14, б). Суммирование здесь осуществляется за счёт суммирования магнитных потоков, создаваемых измерительными катушками в сердечнике прибора

$$\hat{O}_\Sigma \equiv \underline{F}_\Sigma = w(\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) \equiv \underline{I}_0.$$

Токи прямой и обратной последовательности можно определить по линейным токам, аналогично составляющим напряжения

$$\underline{I}_+ = (\underline{I}_a + \underline{a}_3 \underline{I}_b + \underline{a}_3^2 \underline{I}_c)/3 \text{ и} \quad (1.57)$$

$$\underline{I}_- = (\underline{I}_a + \underline{a}_3^2 \underline{I}_b + \underline{a}_3 \underline{I}_c)/3. \quad (1.58)$$

Здесь также как при измерении напряжения с помощью пассивных элементов невозможно создать требуемое фазовое смещение токов фаз *b* и *c*. Поэтому для построения измерительных цепей используют инверсные токи и операторы поворота в соответствии с выражениями

выпускаются с коэффициентом трансформации $k_i = I_1/I_2 = 3$. В этом случае амперметр будет непосредственно показывать величину тока нулевой последовательности.

Измерение нулевой составляющей возможно также с помощью специального амперметра электромагнитной

$$\underline{I}_+ = \left[\underline{I}_a + (-\underline{a}_3)(-\underline{I}_b) + (-\underline{a}_3^2)(-\underline{I}_c) \right] / 3 \text{ и} \quad (1.59)$$

$$\underline{I}_- = \left[\underline{I}_a + (-\underline{a}_3^2)(-\underline{I}_b) + (-\underline{a}_3)(-\underline{I}_c) \right] / 3. \quad (1.60)$$

На рис. 1.14, в показана схема амперметра для измерения тока прямой последовательности. Как следует из схемы, токи катушек прибора равны

$$\underline{I}_{\hat{e}a} = \frac{R}{(\underline{Z}_a + R)k_i} \underline{I}_a = \underline{K}_a \underline{I}_a; \underline{I}_{\hat{e}b} = \frac{R}{(\underline{Z}_b + R)k_i} \underline{I}_b = \underline{K}_b \underline{I}_b; \underline{I}_{\hat{e}c} = \frac{R}{(\underline{Z}_c + R)k_i} \underline{I}_c = \underline{K}_c \underline{I}_c$$

,

$$(1.61)$$

где $\underline{Z}_a, \underline{Z}_b, \underline{Z}_c$ – комплексные сопротивления цепей катушек; R – сопротивление резисторов, включённых параллельно вторичным обмоткам трансформаторов тока; $k_i = I_1 / I_2$ коэффициент трансформации.

Отсюда поток в магнитопроводе и пропорциональные ему показания прибора с учётом встречного включения катушек фаз b и c

$$\hat{\underline{O}}_\Sigma \equiv \underline{F}_\Sigma = w(\underline{I}_{\hat{e}a} - \underline{I}_{\hat{e}b} - \underline{I}_{\hat{e}c}) = w(\underline{K}_a \underline{I}_a - \underline{K}_b \underline{I}_b - \underline{K}_c \underline{I}_c). \quad (1.62)$$

Сравнивая (1.62) с уравнением (1.59) можно легко заметить, что для того, чтобы прибор измерял ток прямой последовательности необходимо выполнение условий

$$\begin{aligned} \underline{K}_b / \underline{K}_a &= -\underline{a}_3 = e^{j2\pi/3} e^{\pm j\pi} = e^{-j\pi/3} = (1 - j\sqrt{3}) / 2; \\ \underline{K}_c / \underline{K}_a &= -\underline{a}_3^2 = e^{-j2\pi/3} e^{\pm j\pi} = e^{j\pi/3} = (1 + j\sqrt{3}) / 2. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Для измерения тока обратной последовательности отношения (1.63) должны быть комплексно-сопряжёнными. Поэтому амперметры, в которых выполняются условия (1.63) могут измерять токи обеих последовательностей в зависимости от порядка подключения трансформаторов к линейным проводам.

1.9.2. Двухфазные системы

В устройствах автоматики часто используются двухфазные электрические машины. Системы питания таких машин, также как трёхфазные системы питания, могут быть несвязанными или четырёхпроводными (рис. 1.15, а) и связанными или трёхпроводными (рис. 1.15, б).

Введём для двухфазных систем особое определение симметрии, понимая под этим равенство модулей двух величин с фазовым сдвигом в 90° эл. и

назовём такую систему, в отличие от истинно симметричной системы с фазовым сдвигом 180° эл., *псевдосимметричной*. Под прямым порядком чередования фаз псевдосимметричной двухфазной системы будем понимать отставание по фазе относительно основного вектора, а под обратным порядком – опережение. В дальнейшем, если это не оговорено особо, опустим приставку и под двухфазными симметричными системами будем понимать именно псевдосимметричные системы.

1.9.2.1. Преобразование к симметричным составляющим

На рис. 1.15, а показаны симметричные системы векторов $\underline{A}_+$; $\underline{B}_+$ и $\underline{A}_-$; $\underline{B}_-$ с прямым и обратным порядком чередования фаз соответственно. Оператором поворота для симметричной двухфазной системы является мнимая единица $\underline{a} = e^{j\pi/2} = j$. Отсюда $\underline{B}_+ = -\underline{a} \cdot \underline{A}_+ = -j\underline{A}_+$; $\underline{B}_- = \underline{a} \cdot \underline{A}_- = j\underline{A}_-$.

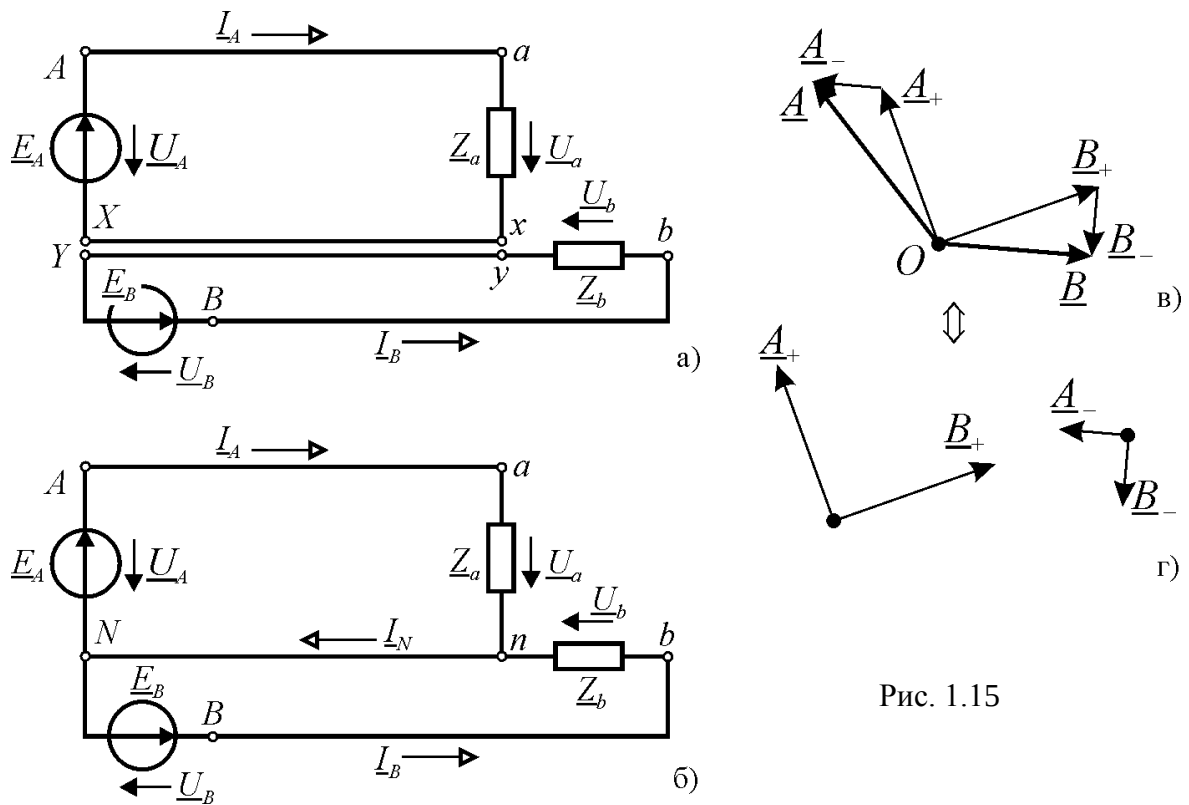


Рис. 1.15

Если любую произвольную пару векторов $\underline{A}$ и $\underline{B}$ (рис. 1.15, в) представить в виде суммы векторов симметричных составляющих прямой и обратной последовательности

$$\begin{aligned} \underline{A} &= \underline{A}_+ + \underline{A}_-; \\ \underline{B} &= \underline{B}_+ + \underline{B}_- = \underline{a}(\underline{A}_- - \underline{A}_+) = j(\underline{A}_- - \underline{A}_+), \end{aligned} \quad (1.48)$$

то такое преобразование в матричной записи будет иметь вид

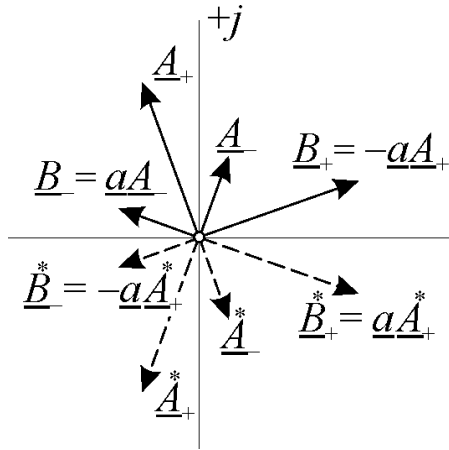


Рис. 1.16

$$\begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A}_+ \\ \underline{A}_- \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2 \begin{bmatrix} \underline{A}_+ \\ \underline{A}_- \end{bmatrix}$$

Матрица $\mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}$ этого

преобразования квадратная и её определитель отличен от нуля ($\Delta = 2j \neq 0$). Следовательно, представление векторов $\underline{A}$ и $\underline{B}$ через симметричные составляющие $\underline{A}_+$ и $\underline{A}_-$ всегда возможно и притом единственным способом.

Основные векторы симметричных составляющих $\underline{A}_+$ и $\underline{A}_-$ для любой пары векторов $\underline{A}$ и $\underline{B}$ можно определить из уравнений (1.48):

$$\begin{aligned} \underline{A}_+ &= (\underline{A} + \underline{a} \cdot \underline{B})/2 = (\underline{A} + j\underline{B})/2; \\ \underline{A}_- &= (\underline{A} - \underline{a} \cdot \underline{B})/2 = (\underline{A} - j\underline{B})/2, \end{aligned} \quad (1.64)$$

т.е. выполнить разложение векторов $\underline{A}$ и $\underline{B}$ на симметричные составляющие. Этот же результат можно получить вычислением обратной матрицы $\mathbf{S}_2^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix}$. Тогда преобразование (1.64) будет иметь вид:

$$\begin{bmatrix} \underline{A}_+ \\ \underline{A}_- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{bmatrix} = \mathbf{S}_2^{-1} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{B} \end{bmatrix}$$

Следует заметить, что принятое выше понятие симметрии (псевдосимметрии) двухфазных систем в принципе исключает наличие нулевой составляющей в разложении векторов, ограничивая его только составляющими прямой и обратной последовательностей, в отличие от истинно симметричных двухфазных систем, в которых возможны только составляющие прямой и нулевой последовательности.

1.9.2.2. Мощность, выраженная через симметричные составляющие

Полную мощность двухфазной цепи можно выразить через симметричные составляющие аналогично тому, как это было сделано для трёхфазных цепей. При этом нужно учесть, что комплексно сопряжённые величины имеют обратный порядок чередования фаз по отношению к исходным комплексным величинам (см. рис. 1.16). С учётом этого комплексная полная мощность будет равна

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \underline{U}_a \underline{I}_a^* + \underline{U}_b \underline{I}_b^* = (\underline{U}_+ + \underline{U}_-)(\underline{I}_+^* + \underline{I}_-^*) + a(\underline{U}_- - \underline{U}_+)(-a)(\underline{I}_-^* - \underline{I}_+^*) = \\
&= (\underline{U}_+ + \underline{U}_-)(\underline{I}_+^* + \underline{I}_-^*) + (\underline{U}_- - \underline{U}_+)(\underline{I}_-^* - \underline{I}_+^*) = \\
&= \underline{U}_+ \underline{I}_+^* + \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_-^*} + \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_+^*} + \underline{U}_- \underline{I}_-^* + \underline{U}_- \underline{I}_-^* - \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_+^*} - \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_-^*} + \underline{U}_+ \underline{I}_+^* = \\
&= 2(\underline{U}_+ \underline{I}_+^* + \underline{U}_- \underline{I}_-^*) = 2(\underline{S}_+ + \underline{S}_-)
\end{aligned} \tag{1.65}$$

где: $\underline{S}_+ = \underline{U}_+ \underline{I}_+^* = P_+ + jQ_+ = U_+ I_+ \cos \varphi_+ + jU_+ I_+ \sin \varphi_+$; – полные комплексные

$$\underline{S}_- = \underline{U}_- \underline{I}_-^* = P_- + jQ_- = U_- I_- \cos \varphi_- + jU_- I_- \sin \varphi_-$$

мощности симметричных составляющих одной фазы цепи; φ_+ , φ_- – углы фазового сдвига соответствующих симметричных составляющих тока относительно составляющих напряжения.

Таким образом, активную и реактивную мощности двухфазной системы можно определить с помощью фазных симметричных составляющих напряжения и тока как

$$\begin{aligned}
P &= \text{Re}[\underline{S}] = 2(P_+ + P_-) = 2(U_+ I_+ \cos \varphi_+ + U_- I_- \cos \varphi_-); \\
Q &= \text{Im}[\underline{S}] = 2(Q_+ + Q_-) = 2(U_+ I_+ \sin \varphi_+ + U_- I_- \sin \varphi_-).
\end{aligned} \tag{1.66}$$

Выражения (1.65) и (1.66) отличаются от соответствующих выражений для трёхфазной цепи только множителем, соответствующим числу фаз, и отсутствием составляющей нулевой последовательности.

1.9.2.3. Условие уравновешенности двухфазной системы

Пользуясь понятием пульсирующей мощности, введённом в разделе 1.9.1.3, можно определить условие уравновешенности двухфазной системы. Для этого представим пульсирующие мощности фаз a и b через симметричные составляющие. Тогда суммарная пульсирующая мощность будет равна:

$$\begin{aligned}
\dot{\underline{I}}_{\Sigma} &= \underline{U}_a \underline{I}_a + \underline{U}_b \underline{I}_b = (\underline{U}_+ + \underline{U}_-)(\underline{I}_+ + \underline{I}_-) + a(\underline{U}_- - \underline{U}_+)(\underline{I}_- - \underline{I}_+) = \\
&= (\underline{U}_+ + \underline{U}_-)(\underline{I}_+ + \underline{I}_-) - (\underline{U}_- - \underline{U}_+)(\underline{I}_- - \underline{I}_+) = \\
&= \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_+} + \underline{U}_+ \underline{I}_- + \underline{U}_- \underline{I}_+ + \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_-} - \cancel{\underline{U}_- \underline{I}_-} + \underline{U}_- \underline{I}_+ + \underline{U}_+ \underline{I}_- - \cancel{\underline{U}_+ \underline{I}_+} = \\
&= 2(\underline{U}_+ \underline{I}_- + \underline{U}_- \underline{I}_+)
\end{aligned}$$

Следовательно, условие уравновешенности двухфазной системы, представленное через симметричные составляющие имеет вид

$$\dot{\underline{I}}_{\Sigma} = 0 \Rightarrow \underline{U}_+ \underline{I}_- + \underline{U}_- \underline{I}_+ = 0. \tag{1.67}$$

Как и следовало ожидать, это условие тождественно условию уравновешенности трёхфазных систем (1.39) с учётом отсутствия нулевой симметричной составляющей. Если двухфазные системы напряжений и токов симметричны и имеют одинаковый порядок чередования фаз ($\underline{U}_- = \underline{I}_- = 0 \Rightarrow \ddot{\underline{I}}_\Sigma = 0$ или $\underline{U}_+ = \underline{I}_+ = 0 \Rightarrow \ddot{\underline{I}}_\Sigma = 0$), то такие системы уравновешенны.

Таким образом, в двухфазных системах, также как в трёхфазных, условие уравновешенности сводится к условию симметрии напряжений и токов.

1.9.2.4. Закон Ома для симметричных составляющих

Представим фазные падения напряжения $\underline{U}_a$ и $\underline{U}_b$ через симметричные составляющие фазных токов и комплексные сопротивления фаз $\underline{Z}_a$ и $\underline{Z}_b$:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_a &= \underline{Z}_a \underline{I}_a = \underline{Z}_a \underline{I}_+ + \underline{Z}_a \underline{I}_- \\ \underline{U}_b &= \underline{Z}_b \underline{I}_b = -\underline{a} \underline{Z}_b \underline{I}_+ + \underline{a} \underline{Z}_b \underline{I}_- \end{aligned} \right\} \quad (1.68)$$

Эти напряжения можно также разложить на симметричные составляющие. Например, составляющие фазы a равны:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_+ &= (\underline{U}_a + \underline{a} \underline{U}_b) / 2 \\ \underline{U}_- &= (\underline{U}_a - \underline{a} \underline{U}_b) / 2 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \end{bmatrix} = \underline{S}_2^{-1} \begin{bmatrix} \underline{U}_a \\ \underline{U}_b \end{bmatrix} \quad (1.69)$$

Подставляя в (1.68) выражения (1.69), получим

$$\begin{aligned} \underline{U}_+ &= \frac{1}{2}(\underline{Z}_a + \underline{Z}_b) \underline{I}_+ + \frac{1}{2}(\underline{Z}_a - \underline{Z}_b) \underline{I}_-; \\ \underline{U}_- &= \frac{1}{2}(\underline{Z}_a - \underline{Z}_b) \underline{I}_+ + \frac{1}{2}(\underline{Z}_a + \underline{Z}_b) \underline{I}_-. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Обозначим коэффициенты при симметричных составляющих тока в уравнениях (1.70) как составляющие сопротивлений прямой и обратной последовательности:

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_+ &= (\underline{Z}_a + \underline{Z}_b) / 2 \\ \underline{Z}_- &= (\underline{Z}_a - \underline{Z}_b) / 2 \end{aligned} \right\} \quad (1.71)$$

Тогда симметричные составляющие напряжения (1.70) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_+ &= \underline{Z}_+ \underline{I}_+ + \underline{Z}_- \underline{I}_- \\ \underline{U}_- &= \underline{Z}_- \underline{I}_+ + \underline{Z}_+ \underline{I}_- \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_+ & \underline{Z}_- \\ \underline{Z}_- & \underline{Z}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I} \quad (1.72)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}^{-1} \mathbf{U} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}_+^2 - \underline{Z}_-^2} \begin{bmatrix} \underline{Z}_+ & -\underline{Z}_- \\ -\underline{Z}_- & \underline{Z}_+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \end{bmatrix}$$

где матрица сопротивлений

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_+ & \underline{Z}_- \\ \underline{Z}_- & \underline{Z}_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{Z}_+ & 0 \\ 0 & \underline{Z}_+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \underline{Z}_- \\ \underline{Z}_- & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_+ + \mathbf{Z}_-$$

представляет собой сумму матриц сопротивлений прямой и обратной последовательности.

Из выражений (1.72) следует, что в общем случае каждая составляющая фазного тока создаёт падения напряжения обеих последовательностей.

В симметричной двухфазной цепи $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}$. Тогда из (1.71) следует, что $\underline{Z}_+ = \underline{Z}$; $\underline{Z}_- = 0$, т.е. в симметричной цепи есть только сопротивление прямой последовательности. Подставляя эти сопротивления в уравнения (1.72), получим:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \end{bmatrix} = \underline{Z} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{U} = \mathbf{Z}_+ \mathbf{I} = \underline{Z} \mathbf{E} \mathbf{I} \quad (1.73)$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}_+^{-1} \mathbf{U} = \frac{1}{\underline{Z}} \mathbf{E} \mathbf{U} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \end{bmatrix}$$

Таким образом, в симметричной двухфазной цепи токи различной последовательности создают падения напряжения только той же последовательности, поэтому системы токов и напряжений разных последовательностей независимы друг от друга.

Если фазные сопротивления образуют сопротивление только обратной последовательности, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \underline{Z}_a &= \underline{Z} \\ \underline{Z}_b &= -\underline{Z} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{aligned} \underline{Z}_+ &= 0 \\ \underline{Z}_- &= \underline{Z} \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

то уравнения (1.72) приобретают вид

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \underline{Z} \\ \underline{Z} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \\ \underline{I} = \underline{Z}^{-1} \underline{U} &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{I}_+ \\ \underline{I}_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\underline{Z}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{U}_+ \\ \underline{U}_- \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.75)$$

В этом случае, также как в случае сопротивления прямой последовательности, каждая составляющая тока определяет только одну составляющую падения напряжения, однако взаимосвязь составляющих тока и напряжения перекрёстная. Ток обратной последовательности создаёт составляющую прямой последовательности напряжения, а ток прямой последовательности – обратную составляющую напряжения.

Из выражений (1.74) следует, что для исключения сопротивления прямой последовательности, т.е. для получения сопротивления только обратной последовательности вида $\underline{Z}_- = \underline{Z} = R + jX$, активное и реактивное сопротивления фазы b должны иметь отрицательные знаки, т.е. в этой фазе цепи должны генерироваться активная и реактивная мощности. Это условие требует включения в цепь вращающихся электрических машин, способных поставлять в систему, по крайней мере, активную мощность. Следовательно, *пассивные двухфазные цепи не могут иметь сопротивлений обратной последовательности.*

Таким образом, «неправильная» двухфазная система обладает всеми свойствами трёхфазной системы и для её анализа могут использоваться те же принципы и понятия, которые используются для анализа трёхфазных систем, за исключением понятия симметричной составляющей нулевой последовательности.

2. Вращающееся магнитное поле

2.1. Пульсирующие и вращающиеся магнитные поля

Одной из причин широкого распространения трёхфазных систем электропитания является возможность получения с их помощью вращающихся магнитных полей, которые используются для преобразования

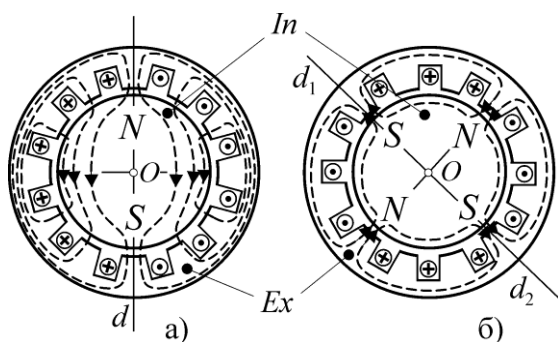


Рис. 2.1

электрической энергии в механическую. Большая часть электрических машин имеет магнитную цепь, выполненную в виде двух коаксиальных ферромагнитных цилиндров, разделённых воздушным зазором. Внешний цилиндр (E_x рис. 2.1) обычно неподвижен. Если в пазы статора поместить соединённые последовательно проводники, по

которым протекает электрический ток так, что по проводникам одной половины пазов он протекает в одном направлении, а по другой половине – во встречном направлении (рис. 2.1, а), то вокруг проводников образуется магнитное поле, линии индукции которого замыкаются по телу статора, воздушному зазору и телу ротора. В пределах одной половины воздушного зазора линии индукции направлены от статора к ротору, а на второй половине – от ротора к статору. Место выхода линий из статора можно рассматривать как северный полюс, а место входа их в статор – как южный полюс магнитного поля, формируемого статором. Таким образом, с помощью одной системы проводников мы получили магнитное поле с одной парой полюсов.

Соединив проводники в пазах так, чтобы они образовали две системы, каждая из которых занимает половину пазов, а направление тока в соседних четвертях пазов было противоположным (рис. 2.1, б), мы получим магнитное поле с двумя парами полюсов.

Расстояние между соседними полюсами магнитного поля называется полюсным делением. Значит, в угловых единицах оно равно

$$\tau = \pi / z_p \quad (2.1)$$

где z_p – число пар полюсов магнитного поля.

Различные магнитные линии поля статора сцепляются с разным числом проводников. Линии, пересекающие воздушный зазор вблизи полюсов, охватывают все проводники, поэтому МДС для этих линий максимальна и равна произведению силы тока на общее число проводников. По мере смещения от полюсов количество проводников, охватываемых магнитными

силовыми линиями, уменьшается, следовательно, уменьшается и МДС этих линий.

Если магнитопровод мысленно разрезать по оси Od (рис. 2.1, а) и развернуть воздушный зазор в линию, то картина распределения МДС по зазору будет иметь вид ступенчатой штриховой линии, показанный на рис. 2.2, а. При этом распределение индукции в воздушном зазоре будет подобно

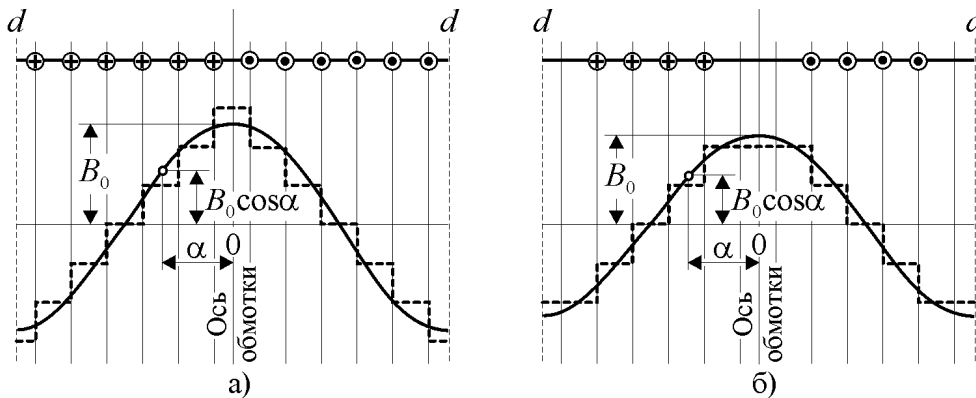


Рис.2.2

распределению МДС при условии ненасыщенного состояния ферромагнетика. В дальнейшем, если это не оговаривается особо, мы всегда будем полагать, что магнитопровод ненасыщен, а также, что ступенчатая кривая распределения индукции разложена в ряд Фурье, и, отбрасывая высшие гармоники, будем оперировать с основной гармоникой разложения, показанной на рис. 2.2 сплошной линией. Таким образом, мы будем считать, что *магнитная индукция распределена по окружности воздушного зазора по синусоидальному закону*. Её максимальное значение соответствует оси симметрии системы проводников или, иначе говоря, геометрической оси обмотки статора, возбуждающей магнитное поле, а на нейтральной линии, проходящей посередине между полюсами, индукция равна нулю. Обычно проводники обмотки заполняют только часть пазов (рис. 2.2, б). В этом случае распределение индукции в зазоре близко к трапецеидальному

Положение произвольной точки воздушного зазора можно определить углом α , отсчитываемым от оси обмотки (рис. 2.2). Тогда величина индукции в этой точке будет равна

$$B = B_0 \cos \alpha ,$$

где B_0 – значение индукции на оси обмотки.

Изменение тока в проводниках обмотки вызовет пропорциональное изменение её МДС и, соответственно, пропорциональное изменение величины индукции. При этом характер распределения МДС и индукции вдоль

воздушного зазора, а также положение оси полюсов магнитного поля будут неизменными.

Пусть в рассматриваемой обмотке протекает переменный синусоидальный ток с частотой $\omega = 2\pi f$. Тогда магнитный поток, сцепляющийся с обмоткой, и магнитная индукция в любой точке зазора также будут изменяться во времени по синусоидальному закону. Если обозначить максимальную индукцию на оси обмотки через B_m и отсчёт времени вести от момента, когда она имеет максимальное значение, то

$$B_0 = B_m \cos \omega t \text{ и } B_p = F(\alpha, t) = B_0 \cos \alpha = B_m \cos \omega t \cos \alpha \quad (2.2)$$

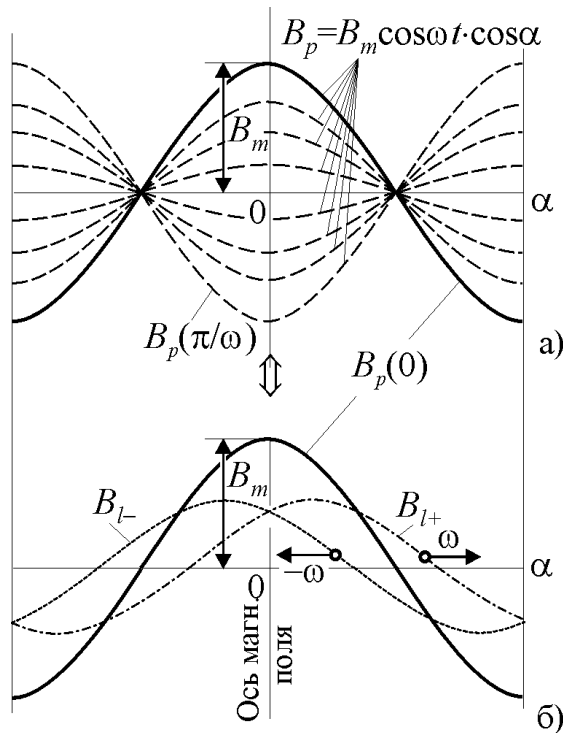


Рис.2.3

На рис. 2.3, а показано распределение индукции в зазоре для нескольких моментов времени в пределах периода изменения тока частотой ω .

В дальнейшем направление, в котором основная волна индукции достигает максимального значения B_m , мы будем называть *осью магнитного поля*. В рассматриваемом случае *ось изменяющегося во времени магнитного поля остаётся неподвижной в пространстве и совпадает с осью обмотки*. Такое магнитное поле называется *пульсирующим полем*.

Раскладывая по известному тригонометрическому выражению произведение косинусов временного (ωt) и пространственного (α) углов на полусумму косинусов, получим

$$B_p = B_m \cos \omega t \cos \alpha = \frac{B_m}{2} \cos(\alpha - \omega t) + \frac{B_m}{2} \cos(\alpha + \omega t) = B_{l+} + B_{l-}. \quad (2.3)$$

Пространственный угол α определяет положение произвольной точки в зазоре электрической машины по отношению к оси магнитного поля.

Рассмотрим первое слагаемое в выражении (2.3) – B_{l+} . Пусть положение некоторой точки в зазоре соответствует углу $\alpha = \omega t + \vartheta$, т.е. эта точка перемещается в зазоре в положительном направлении с постоянной угловой

скоростью, равной частоте ω , из начального состояния, соответствующего углу ϑ . Тогда

$$B_{l+} = \frac{B_m}{2} \cos(\alpha - \omega t) = \frac{B_m}{2} \cos(\omega t + \vartheta - \omega t) = \frac{B_m}{2} \cos \vartheta = \text{const}. \quad (2.4)$$

Это означает, что величина индукции для такой движущейся точки будет оставаться постоянной, а распределение индукции для всех точек с углами $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ будет синусоидальным. Для угла $\vartheta = 0$, т.е. для точки, располагающейся на оси магнитного поля, $B_{l+} = B_m / 2 = \text{const} = \text{max}$. Следовательно, функция $B_{l+}(\alpha, t)$ соответствует магнитному полю, ось которого вращается в пространстве в положительном направлении и совершает полный оборот за время, равное периоду переменного тока, питающего обмотку ($T = 2\pi / \omega$). Причём, это магнитное поле образует в зазоре электрической машины синусоидальную бегущую волну.

Магнитное поле, ось которого вращается в пространстве, называется *вращающимся магнитным полем*. Если величина индукции на оси магнитного поля остаётся постоянной, то оно называется *круговым вращающимся полем*, т.к. его можно изобразить вращающимся вектором неизменной длины, описывающим своим концом окружность:

$$\underline{B} = B_{\text{max}} e^{j(\omega t + \vartheta)}. \quad (2.5)$$

При этом значение индукции в произвольной точке a зазора, смещённой на угол α по отношению к началу отсчёта, можно определить как проекцию вектора $\underline{B}$ на ось, проходящую через заданную точку, т.е. то индукция в точке a будет равна

$$B_a = B_{\text{max}} \cos(\omega t + \vartheta - \alpha).$$

Следует заметить, что в течение одного периода переменного тока ось вращающегося кругового магнитного поля смещается в пространстве на два полюсных деления, а т.к. величина полюсного деления τ определяется числом пар полюсов, то пространственный угол, на который сместится ось, или период волны индукции в зазоре равен $T_B = 2\pi / z_p$ радиан. Разделив этот угол на длительность периода тока $T = 2\pi / \omega$, мы получим значение угловой скорости вращения магнитного поля

$$\Omega = T_B / T = \omega / z_p. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое в выражении (2.3) отличается от первого только знаком временного (фазового) угла ωt . Значит, для этого слагаемого будет справедливым всё, что относится к первому с той лишь разницей, что

вращение поля или движение бегущей волны будет происходить в отрицательном направлении, т.е. по часовой стрелке.

Таким образом, *пульсирующее магнитное поле можно представить суммой двух вращающихся в противоположных направлениях круговых полей или, что то же самое, двух бегущих в противоположных направлениях синусоидальных волн с амплитудами, равными половине амплитуды волны индукции пульсирующего поля* (рис. 2.3, б).

2.2. Получение вращающегося магнитного поля

2.2.1. Условия получения кругового магнитного поля в симметричной машине

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое системой, состоящей из $n > 2$ одинаковых обмоток, распределённых по пазам статора так, что их оси смещены в пространстве на угол $\beta = 2\pi/n$. Назовём такие обмотки симметричными. Подключим эти обмотки к симметричной n -фазной сети переменного тока так, чтобы фазовый сдвиг МДС обмоток был равен пространственному смещению их осей. Тогда каждая из обмоток будет формировать в воздушном зазоре пульсирующее магнитное поле с распределением индукции, соответствующим выражению (2.2) с учётом фазового и пространственного сдвига. Так как мы считаем, что магнитопровод машины ненасыщен, то величина индукции результирующего магнитного поля в каждой точке зазора с угловым смещением α от оси первой обмотки будет равна сумме индукций полей всех n обмоток. Раскладывая пульсирующие поля обмоток на круговые и суммируя результат, получим значение индукции для любой точки с угловой координатой α :

$$\begin{aligned}
B_1 &= B_{10} \cos \alpha = B_m \cos \omega t \cos \alpha = \frac{B_m}{2} \cos(\alpha - \omega t) + \frac{B_m}{2} \cos(\alpha + \omega t); \\
B_2 &= B_{20} \cos(\alpha - \beta) = B_m \cos(\omega t - \beta) \cos(\alpha - \beta) = \\
&= \frac{B_m}{2} \cos(\alpha - \omega t) + \frac{B_m}{2} \cos(\alpha + \omega t - 2\beta); \\
&\vdots \\
B_k &= B_{k0} \cos[\alpha - (k-1)\beta] = B_m \cos[\omega t - (k-1)\beta] \cos[\alpha - (k-1)\beta] = \\
&= \frac{B_m}{2} \cos(\alpha - \omega t) + \frac{B_m}{2} \cos[\alpha + \omega t - 2(k-1)\beta]; \\
&\vdots \\
B_n &= B_{n0} \cos[\alpha - (n-1)\beta] = B_m \cos[\omega t - (n-1)\beta] \cos[\alpha - (n-1)\beta] = \\
&= \frac{B_m}{2} \cos(\alpha - \omega t) + \frac{B_m}{2} \cos[\alpha + \omega t - 2(n-1)\beta] \\
\hline
B(\alpha, t) &= \sum_{k=1}^n B_k = \frac{nB_m}{2} \cos(\alpha - \omega t) + \frac{B_m}{2} \sum_{k=1}^n \cos[\alpha + \omega t - 2(k-1)\beta]
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Вторая сумма в выражении (2.7) тождественно равна нулю –

$$\begin{aligned}
\frac{B_m}{2} \sum_{k=1}^n \cos[\alpha + \omega t - 2(k-1)\beta] &= \frac{B_m}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \cos(\alpha + \omega t) \cos[2(k-1)\beta] + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sin(\alpha + \omega t) \sin[2(k-1)\beta] \right\} = \\
&= \frac{B_m}{2} \left\{ n \cos(\alpha + \omega t) \sum_{k=1}^n \cos[(k-1)4\pi/n] + \right. \\
&\quad \left. + n \sin(\alpha + \omega t) \sum_{k=1}^n \sin[(k-1)4\pi/n] \right\} = 0
\end{aligned} \tag{2.8}$$

т.к. её слагаемые соответствуют условию симметрии (1.11) при $q = 2$, а первая сумма соответствует выражению (2.4) для индукции кругового магнитного поля, вращающегося в положительном направлении. Причём, максимальное значение индукции этого поля в $n/2$ раз больше максимальной индукции пульсирующего поля одной обмотки.

Изменим порядок чередования фаз источника питания обмоток на обратный. Тогда k -я обмотка будет формировать магнитное поле с распределением индукции по закону

$$B_k = B_{k0} \cos[\alpha - (k-1)\beta] = B_m \cos[\omega t + (k-1)\beta] \cos[\alpha - (k-1)\beta] = \\ = \frac{B_m}{2} \cos(\alpha + \omega t) + \frac{B_m}{2} \cos[\alpha - \omega t - 2(k-1)\beta]$$

а суммарное значение индукции всех n обмоток будет равно

$$B(\alpha, t) = \sum_{k=1}^n B_k = \frac{nB_m}{2} \cos(\alpha + \omega t) + \frac{B_m}{2} \sum_{k=1}^n \cos[\alpha - \omega t - 2(k-1)\beta] . (2.9)$$

Значит, при обратном порядке чередования фаз источника питания, т.е. когда фазовый сдвиг МДС обмоток равен пространственному смещению их осей, но имеет противоположный знак, в машине формируется круговое вращающееся магнитное поле с отрицательным направлением вращения (по часовой стрелке). Следовательно, *для изменения направления вращения магнитного поля достаточно изменить порядок следования фаз источника питания.* В случае трёхфазной машины для этого достаточно поменять местами точки подключения любых двух обмоток.

Пусть обмотки симметричной машины с некоторым порядком чередования фаз, соответствующим кратности углового смещения q_m их осей, подключены к симметричному источнику с порядком чередования фаз, соответствующим кратности q_s фазового смещения. Тогда распределение индукции k -й обмотки будет соответствовать функции

$$B_k = B_{k0} \cos[\alpha - q_m(k-1)\beta] = B_m \cos[\omega t - q_s(k-1)\beta] \cos[\alpha - q_m(k-1)\beta] = \\ = \frac{B_m}{2} \cos[\alpha - \omega t - (q_m + q_s)(k-1)\beta] + \frac{B_m}{2} \cos[\alpha + \omega t - (q_m - q_s)(k-1)\beta]$$

Если $q_m \neq \pm q_s$, то $q_m - q_s \neq 0$; $q_m - q_s \neq n$; $q_m + q_s \neq 0$; $q_m + q_s \neq n$. Поэтому в результирующем распределении индукции всех n обмоток образуются четыре суммы синусных функций, удовлетворяющие условиям симметрии (1.11) и тождественно равные нулю:

$$\begin{aligned}
B(\alpha, t) &= \frac{B_m}{2} \left\{ \sum_{k=1}^n \cos[\alpha - \omega t - (q_m - q_s)(k-1)\beta] + \sum_{k=1}^n \cos[\alpha + \omega t + (q_m - q_s)(k-1)\beta] \right\} = \\
&= \frac{B_m}{2} \left\{ n \cos(\alpha - \omega t) \sum_{k=1}^n \cos[(q_m - q_s)(k-1)2\pi/n] + \right. \\
&\quad \left. + n \sin(\alpha - \omega t) \sum_{k=1}^n \sin[(q_m - q_s)(k-1)2\pi/n] \right\} + \\
&\quad + \frac{B_m}{2} \left\{ n \cos(\alpha + \omega t) \sum_{k=1}^n \cos[(q_m + q_s)(k-1)2\pi/n] - \right. \\
&\quad \left. - n \sin(\alpha + \omega t) \sum_{k=1}^n \sin[(q_m + q_s)(k-1)2\pi/n] \right\} = 0 + 0
\end{aligned}$$

Следовательно, при различных кратностях угловых смещений осей обмоток и фазовых сдвигов источника питания, т.е. при неравенстве углов пространственного смещения обмоток и фазового смещения их МДС, формирование магнитного поля в машине невозможно. Это справедливо и для частного случая неравенства, соответствующего источнику питания с нулевой последовательностью, т.е. когда $q_s = 0 \neq q_m$.

Таким образом, достаточными условиями получения кругового вращающегося магнитного поля в симметричной машине с питанием обмоток от симметричного n -фазного источника являются:

1. равенство амплитуд индукций полей всех обмоток;
2. равенство углов фазового сдвига МДС и пространственного смещения обмоток с точностью до знака.

2.2.2. Эллиптическое магнитное поле

Рассмотрим общий случай, когда магнитное поле в машине формируется системой n синусоидальных пульсирующих полей с различными амплитудами индукции и произвольно смещёнными в пространстве осями. Это соответствует питанию обмоток с произвольно расположенными осями от несимметричного n -фазного источника переменного тока. Выберем некоторую ось за начало отсчёта и обозначим углы, образуемые с ней осями обмоток, через $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots \beta_n$

Каждая обмотка формирует пульсирующее магнитное поле с индукцией на её оси, равной

$$B_{mk} \cos(\omega t - \phi_k).$$

Это поле можно разложить на два круговых магнитных поля вращающихся в положительном и отрицательном направлениях с угловой скоростью ω и представить эти поля вращающимися векторами

$$\begin{aligned}\underline{B}_{k+} &= \frac{B_{mk}}{2} e^{j(\omega t - \phi_k)} e^{j\beta_k} = \frac{B_{mk}}{2} e^{j(\omega t - \phi_k + \beta_k)} = \frac{B_{mk}}{2} e^{j(\beta_k - \phi_k)} e^{j\omega t} = \underline{B}_{0k+} e^{j\omega t}; \\ \underline{B}_{k-} &= \frac{B_{mk}}{2} e^{-j(\omega t - \phi_k)} e^{j\beta_k} = \frac{B_{mk}}{2} e^{-j(\omega t - \phi_k - \beta_k)} = \frac{B_{mk}}{2} e^{j(\beta_k + \phi_k)} e^{-j\omega t} = \underline{B}_{0k-} e^{-j\omega t}\end{aligned}\quad (2.10)$$

Суммируем все векторы начальных состояний полей с одинаковыми направлениями вращения, полагая аргументы суммарных векторов равными 2γ и 2δ ,

$$\underline{B}_{0+} = \sum_{k=1}^n \underline{B}_{0k+} = B_{0+} e^{j2\gamma}; \quad \underline{B}_{0-} = \sum_{k=1}^n \underline{B}_{0k-} = B_{0-} e^{j2\delta}, \quad (2.11)$$

а затем перейдем к новой системе координат, смещённой на угол $-(\gamma + \delta)$

$$\underline{B}'_{0+} = \underline{B}_{0+} e^{-j(\gamma + \delta)} = B_{0+} e^{j(\gamma - \delta)}; \quad \underline{B}'_{0-} = \underline{B}_{0-} e^{-j(\gamma + \delta)} = B_{0-} e^{-j(\gamma - \delta)}.$$

Тогда векторы индукции, изображающие вращающиеся круговые поля в смещённой системе координат, будут иметь вид

$$\begin{aligned}\underline{B}'_{+} &= \underline{B}'_{0+} e^{j\omega t} = B_{0+} e^{j(\gamma - \delta)} e^{j\omega t} = B_{0+} e^{j(\omega t + \gamma - \delta)} = B_{0+} e^{j\vartheta} = B_{0+} \cos \vartheta + j B_{0+} \sin \vartheta; \\ \underline{B}'_{-} &= \underline{B}'_{0-} e^{-j\omega t} = B_{0-} e^{-j(\gamma - \delta)} e^{-j\omega t} = B_{0-} e^{-j(\omega t + \gamma - \delta)} = B_{0-} e^{-j\vartheta} = B_{0-} \cos \vartheta - j B_{0-} \sin \vartheta,\end{aligned}$$

где $\vartheta = \omega t + \gamma - \delta$.

Результирующий вектор магнитной индукции равен сумме векторов полей прямого и обратного вращения $\underline{B}'_{+}$ и $\underline{B}'_{-}$.

$$\underline{B}' = \underline{B}'_{+} + \underline{B}'_{-} = (B_{0+} + B_{0-}) \cos \vartheta + j(B_{0+} - B_{0-}) \sin \vartheta = x' + jy'$$

Отсюда, с учётом того, что $\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta = 1$, $\cos \vartheta = x' / (B_{0+} + B_{0-})$ и $\sin \vartheta = y' / (B_{0+} - B_{0-})$, получим уравнение годографа вектора индукции в смещённой системе координат

$$\frac{(x')^2}{(B_{0+} + B_{0-})^2} + \frac{(y')^2}{(B_{0+} - B_{0-})^2} = 1 \quad (2.12)$$

т.е. конец вектора индукции результирующего магнитного поля описывает эллипс с большой полуосью $(B_{0+} + B_{0-})$ и малой полуосью $(B_{0+} - B_{0-})$ (рис. 2.4). Это значит, что магнитное поле в зазоре машины представляет собой бегущую волну индукции с синусоидальным распределением, амплитуда

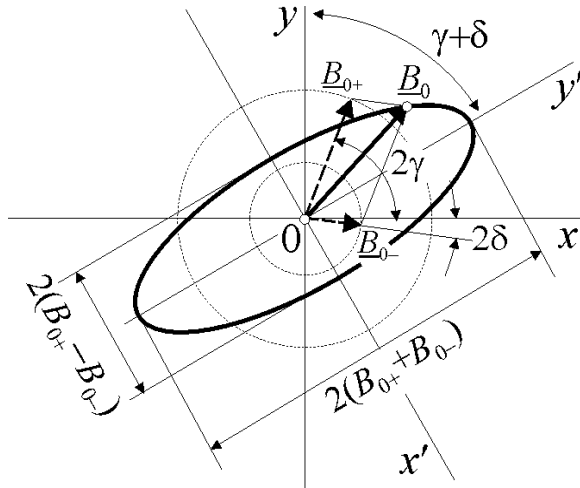


Рис. 2.4

которой изменяется по величине между наибольшим и наименьшим значениями, равными соответственно $(B_{0+} + B_{0-})$ и $(B_{0+} - B_{0-})$. Такое магнитное поле называется *эллиптическим вращающимся полем*.

Очевидно, что если одна из составляющих эллиптического поля отсутствует, то годографом результирующего вектора будет окружность, т.е. поле в машине будет круговым. Если амплитуды индукции

полей прямого и обратного вращения одинаковы, т.е. $B_{0+} = B_{0-} = B_0$, то малая ось эллипса годографа равна нулю и

$$\underline{B}' = \underline{B}'_+ + \underline{B}'_- = 2B_0 \cos \vartheta + j0 = 2B_0 \cos(\omega t + \gamma - \delta) = x' + j0.$$

Значит, в этом случае, как и следовало ожидать, поле в машине пульсирующее с амплитудой, равной двойной амплитуде составляющих прямого и обратного вращения, и осью, совпадающей с осью x' смещённой системы координат.

Определим условия, при которых поле в машине будет круговым. Для этого необходимо, чтобы $\underline{B}_{0+} \neq 0 \wedge \underline{B}_{0-} = 0$ или $\underline{B}_{0+} = 0 \wedge \underline{B}_{0-} \neq 0$. В общем случае для несимметричных систем векторов начальных состояний $\tilde{\underline{B}}_{0+}$ и $\tilde{\underline{B}}_{0k-}$ эта задача не имеет однозначного решения. Однако если множество n векторов $\tilde{\underline{B}}_{0+}$ или $\tilde{\underline{B}}_{0k-}$ образует симметричную n -фазную систему ненулевого порядка, то их сумма будет равна нулю. Из определения симметрии для этих множеств векторов следуют условия:

$$\begin{aligned} 1) \quad & |\underline{B}_{0k+}| = B_{0+} / n, \quad \forall \underline{B}_{0k+} \in \tilde{\underline{B}}_{0+} \\ 2) \quad & \arg(\underline{B}_{0k+}) = \arg(\underline{B}_{01+}) \pm 2\pi q_+ (k-1)/n \end{aligned} \quad \text{и} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & |\underline{B}_{0k-}| = B_{0-} / n, \quad \forall \underline{B}_{0k-} \in \tilde{\underline{B}}_{0-} \\ 2) \quad & \arg(\underline{B}_{0k-}) = \arg(\underline{B}_{01-}) \pm 2\pi q_- (k-1)/n \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $k=1,2,\dots,n$ – номер вектора, а $q=0,1,\dots,(n-1)$ – кратность смещения. Выполнение условий (2.13) или (2.14) при всех значениях $q \neq 0$ означает подавление составляющей прямого и/или обратного вращения. При $q=0$ или $q=n$ векторы начальных состояний образуют симметричную систему нулевого порядка с максимальным значением индукции, равным $n|\underline{B}_{0k+}| = B_{0+}$ или $n|\underline{B}_{0k-}| = B_{0-}$, т.е. в машине формируется круговое магнитное поле с соответствующим направлением вращения.

Принимая аргумент первого вектора в обеих системах за начало отсчёта углов, т.е. полагая $\arg(\underline{B}_{01+})=0$ и $\arg(\underline{B}_{01-})=0$, получим с учётом выражений (2.10) условия симметрии для аргументов векторов начальных состояний

$$\begin{aligned} 1) \quad & \beta_k - \phi_k = \pm 2\pi q_+(k-1)/n; \\ 2) \quad & \beta_k + \phi_k = \pm 2\pi q_-(k-1)/n. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Углы β_k определяют положение осей обмоток, а углы ϕ_k – фазовый сдвиг их МДС. В случае $\phi_k \neq 0$ оба условия (2.15) всегда выполнимы и, в то же время, одновременное их выполнение невозможно, поэтому *в общем случае в несимметричной машине при несимметричном питании всегда возможно получение кругового магнитного поля с прямым и обратным направлением вращения.*

Рассмотрим симметричную машину при симметричном питании. Для неё углы смещения обмоток равны $\beta_k = 2\pi q_m(k-1)/n$, а фазовые сдвиги – $\phi_k = 2\pi q_s(k-1)/n$. Подставляя эти значения в (2.15), получим условия симметрии углов векторов начальных состояний в виде:

$$\begin{aligned} 1) \quad & q_m - q_s = q_+; \\ 2) \quad & q_m + q_s = q_-, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где q_m, q_s, q_+, q_- – кратности смещения положения осей обмоток, фазовых сдвигов источника питания и систем векторов начальных состояний прямого и обратного вращения.

Из условий (2.16) следует, что при $q_m = q_s \Rightarrow q_+ = 0; q_- = q_m + q_s \neq 0$, т.е. при питании машины от источника, фазовые сдвиги которого равны смещениям соответствующих осей обмоток в пространстве, в машине будет формироваться круговое магнитное поле с положительным направлением вращения, т.к. $q_+ = 0 \Rightarrow \underline{B}_+ = n\underline{B}_{0+}; q_- \neq 0 \Rightarrow \underline{B}_- = 0$. При изменении порядка чередования фаз источника питания на противоположный, т.е. при питании машины от источника, фазовые сдвиги которого равны смещениям

соответствующих осей обмоток в пространстве, но имеют противоположный знак: $q_m = -q_s \Rightarrow q_+ = q_m + q_s \neq 0; q_- = q_m - q_s = 0$. Значит, в машине будет формироваться круговое магнитное поле с отрицательным направлением вращения, т.к. $q_+ \neq 0 \Rightarrow \underline{B}_+ = 0; q_- \neq 0 \Rightarrow \underline{B}_- = n\underline{B}_{0-}$. Если порядки чередования фаз источника питания и машины различны, то $q_m \neq q_s \Rightarrow q_+ = q_m - q_s \neq 0; q_- = q_m + q_s \neq 0$, поэтому обе составляющие равны нулю и поле в машине отсутствует. Питание машины от однофазного источника, т.е. от источника с нулевой последовательностью чередования фаз, является частным случаем неравенства $q_m \neq q_s$, в котором $q_m \neq 0; q_s = 0$. Следовательно, в этом случае магнитное поле в машине также отсутствует.

Таким образом, мы пришли к результатам, полученным ранее с помощью тригонометрических функций распределения индукции в зазоре машины.

Изображая вектор индукции $\underline{B}'$ комплексным числом $\underline{B}' = Be^{j\psi} = B_{0+}e^{j\vartheta} + B_{0-}e^{-j\vartheta}$ можно определить текущее значение угла ψ в смещённой систем координат:

$$\psi = \arg(\underline{B}') = \arctg \left[\frac{\text{Im}(\underline{B}')}{\text{Re}(\underline{B}')} \right] = \arctg \left[\frac{B_{0+} - B_{0-}}{B_{0+} + B_{0-}} \text{tg } \vartheta \right] = \arctg [k_y \cdot \text{tg } \vartheta],$$

где $k_y = \frac{B_{0+} - B_{0-}}{B_{0+} + B_{0-}}$ – коэффициент

формы эллипса, равный отношению размеров малой и большой полуосей.

Отсюда можно найти угловую скорость вращения вектора индукции, которая является производной от углового положения по времени

$$\omega_y = \frac{d\psi}{dt} = k_y \frac{\omega}{1 - (1 - k_y^2) \sin^2 \vartheta}.$$

Следовательно, при эллиптическом поле вектор индукции вращается неравномерно. Максимальная

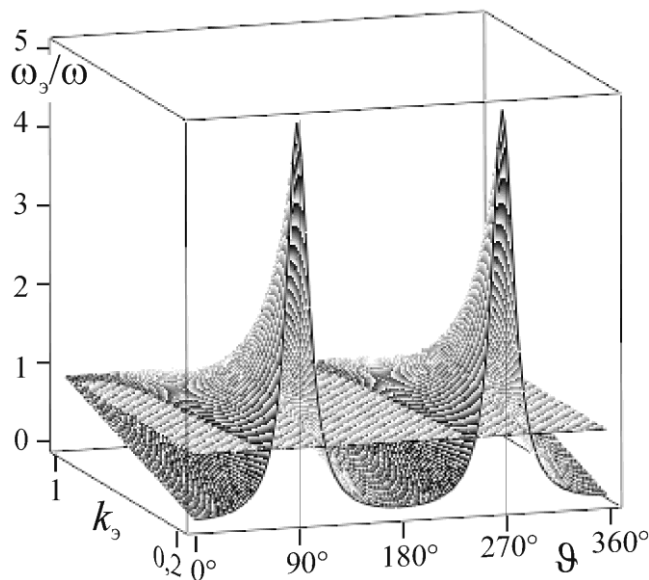


Рис. 2.5

частота вращения равна $\omega_{y\max} = \omega/k_y$ и соответствует угловым положениям точки на малой оси эллипса (90° и 270° в смещённой системе координат), а минимальная – $\omega_{y\min} = \omega k_y$ соответствует угловым положениям точки на большой оси эллипса, т.е. углам 0° и 180° в смещённой системе координат

(рис. 2.5). Неравномерность вращения возрастает с уменьшением коэффициента формы эллипса k_y и при пульсирующем поле функция $\omega_y(t)$ превращается в дельта-функцию с нулевой скоростью вращения при $\underline{B}' \neq 0$ и со скоростью, стремящейся к бесконечности при $\underline{B}' \rightarrow 0$.

2.3. Вращающееся магнитное поле в двухфазной машине

Для анализа магнитного поля в двухфазной машине воспользуемся выражениями (2.10). Если оси первой и второй обмотки составляют по отношению к началу отсчёта углы β_1 и β_2 , а начальные фазы МДС ϕ_1 и ϕ_2 , то векторы круговых полей прямого и обратного вращения, на которые раскладываются пульсирующие поля имеют вид:

$$\begin{aligned}\underline{B}_{1+} &= \frac{B_{m1}}{2} e^{j(\beta_1 - \phi_1)} e^{j\omega t} = \underline{B}_{01+} e^{j\omega t}; & \underline{B}_{2+} &= \frac{B_{m2}}{2} e^{j(\beta_2 - \phi_2)} e^{j\omega t} = \underline{B}_{02+} e^{j\omega t}; \\ \underline{B}_{1-} &= \frac{B_{m1}}{2} e^{-j(\beta_1 + \phi_1)} e^{-j\omega t} = \underline{B}_{01-} e^{-j\omega t}; & \underline{B}_{2-} &= \frac{B_{m2}}{2} e^{-j(\beta_2 + \phi_2)} e^{-j\omega t} = \underline{B}_{02-} e^{-j\omega t}.\end{aligned}\quad (2.17)$$

Если амплитуды индукций одной или обеих обмоток ненулевые $B_{m1} \neq 0 \vee B_{m2} \neq 0$, а для углов справедливы соотношения:

$$\begin{aligned}(\beta_1 - \phi_1) + (\beta_2 - \phi_2) &\neq (2g \pm 1)\pi; \\ (\beta_1 + \phi_1) + (\beta_2 + \phi_2) &\neq (2h \pm 1)\pi; \\ g &= 0, 1, 2, \dots; h = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}$$

то суммарные индукции полей прямого и обратного вращения не будут равны нулю, т.е. $\underline{B}_{0+} = \underline{B}_{01+} + \underline{B}_{02+} \neq 0$ и $\underline{B}_{0-} = \underline{B}_{01-} + \underline{B}_{02-} \neq 0$, и в машине сформируется эллиптическое магнитное поле.

Для формирования кругового поля необходимо, чтобы одна из составляющих $\underline{B}_{0+}$ или $\underline{B}_{0-}$ была нулевой. Как известно, сумма двух ненулевых векторов равна нулю только, если равны модули слагаемых, а аргументы отличаются на величину π . Следовательно, условиями существования кругового магнитного поля в двухфазной машине с прямым и обратным направлением вращения будут соответственно:

$$\begin{aligned}1) \quad (\beta_2 + \phi_2) &= (\beta_1 + \phi_1) + (2g \pm 1)\pi; \\ 2) \quad (\beta_2 - \phi_2) &= (\beta_1 - \phi_1) + (2h \pm 1)\pi; \\ g &= 0, 1, 2, \dots; h = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (2.18)$$

а также

$$B_{m1} = B_{m2} \neq 0 \quad (2.19)$$

Примем за начало отсчёта углов ось первой обмотки и, не ограничивая общности выводов, положим, что начальная фаза МДС в неё равна нулю. Тогда из (2.18) с учётом того, что $\beta_1 = 0$; $\phi_1 = 0$; $\beta_2 = \beta_1 + \gamma = \gamma$, где γ – смещение оси второй обмотки по отношению к первой, получим соотношения углов, необходимое для формирования кругового магнитного поля:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \gamma + \phi_2 = \pi \Rightarrow \phi_2 = \pi - \gamma; \\ 2) \quad & \gamma - \phi_2 = \pi \Rightarrow \phi_2 = -(\pi - \gamma). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из выражений (2.20) следует, что в двухфазной машине с симметрией, соответствующей этому понятию для машин с числом фаз больше двух, т.е. при $\gamma = 2\pi/m = \pi$, где m – число фаз, формирование магнитного поля невозможно, т.к. одновременно обращаются в нуль углы ϕ_2 , что означает одновременное отсутствие составляющих прямого и обратного вращения.

Следовательно, для получения кругового поля необходимо, чтобы вторая обмотка была смещена по отношению к первой на некоторый угол, отличающийся от π . Рассмотрим зависимость величины индукции от величины смещения второй обмотки γ для случая выполнения условия получения кругового поля прямого вращения, т.е. когда $\beta_1 = 0$; $\beta_2 = \gamma$; $\phi_1 = 0$; $\phi_2 = \pi - \gamma$. При этих условиях из выражений (2.17) получим:

$$\underline{B}_{0+} = \underline{B}_{01+} + \underline{B}_{02+} = \frac{B_m}{2} e^{j(\beta_1 - \phi_1)} + \frac{B_m}{2} e^{j(\beta_2 - \phi_2)} = \frac{B_m}{2} [1 + e^{j(2\gamma - \pi)}].$$

Очевидно, что функция

$$|\underline{B}_{0+}|(\gamma) = \frac{B_m}{2} \sqrt{[1 + \cos(2\gamma - \pi)]^2 + \sin^2(2\gamma - \pi)} = \frac{B_m}{2} \sqrt{[1 - \cos(2\gamma)]^2 + \sin^2(2\gamma)}$$

имеет максимум в интервале $0 < \gamma < \pi$, т.к. на границах этого интервала она обращается в нуль. Найдём его значение:

$$\begin{aligned} d|\underline{B}_{0+}|/d\gamma &= \frac{B_m [\sin(2\gamma)]}{\sqrt{[1 - \cos(2\gamma)]^2 + \sin^2(2\gamma)}} = 0 \Big|_{\gamma=\pi/2} \\ |\underline{B}_{0+}|(\pi/2) &= B_m \end{aligned}$$

Таким образом, максимально возможная индукция в двухфазной машине при круговом поле будет при смещении оси второй обмотки на угол $\pi/2$ и её величина будет равна амплитуде индукции одной из обмоток. При этом фазовый сдвиг МДС второй обмотки должен быть $\pm\pi/2$. Равенство знаков углов смещения и фазового сдвига, так же как в машинах с бóльшим числом

фаз, соответствует формированию кругового магнитного поля прямого вращения, а изменение знака на противоположный приводит к изменению направления вращения поля.

Из изложенного следует, что понятия симметрии, принятые для машин с числом фаз больше двух неприменимы к двухфазным машинам. Для них оптимальными условиями, приводящими к формированию кругового магнитного поля с максимально возможной амплитудой индукции являются:

1. смещение осей обмоток относительно друг друга на 90° ;
2. фазовый сдвиг МДС обмоток $\pm 90^\circ$;
3. равенство амплитуд МДС обмоток.

Двухфазные машины, соответствующие первому условию, в дальнейшем мы будем называть симметричными, а состояние, соответствующее второму и третьему условиям – симметричным режимом.

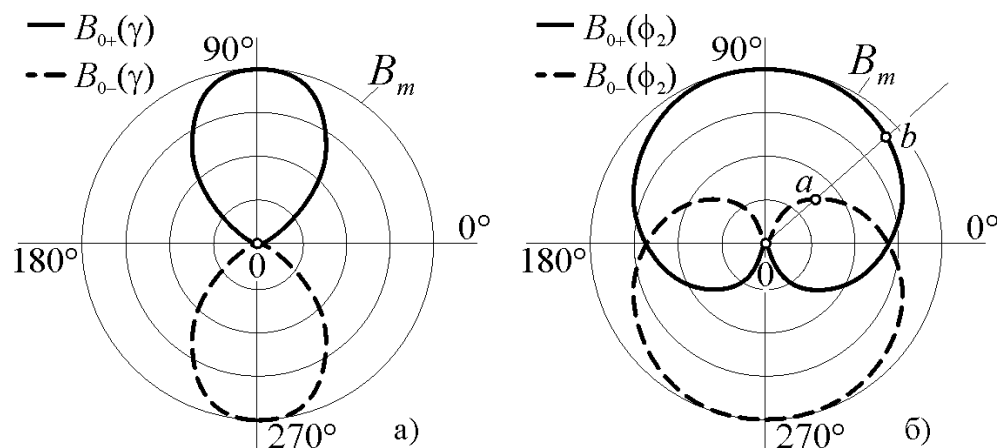


Рис. 2.6

На рис. 2.6, а показана в полярных координатах зависимость амплитуды составляющих индукции от величины углового смещения оси второй обмотки относительно первой γ , а на рис. 2.6, б – зависимость от величины фазового сдвига МДС второй обмотки ϕ_2 при пространственном смещении оси на 90° . Из рис. 2.6, б следует, что при любых фазовых сдвигах кроме $\phi_2 = 0, \pm 90, 180^\circ$ в машине формируется эллиптическое магнитное поле, т.к. в ней одновременно присутствуют составляющие прямого и обратного вращения с различными амплитудами. Это видно по тому, что любой радиус при этих условиях пересекает обе кривые, и радиус-векторы, проведённые в точки пересечения, имеют разные модули (точки а и б на рис. 2.6, б). Точки пересечения кривых $B_{0+}(\phi_2)$ и $B_{0-}(\phi_2)$ соответствуют пульсирующему магнитному полю, т.к. в этом случае амплитуды составляющих одинаковы ($\phi_2 = 0, 180^\circ$). В точках, соответствующих фазовому сдвигу $\phi_2 = \pm 90^\circ$, одна из составляющих обращается в нуль и поле в машине становится круговым с

положительным ($\phi_2 = +90^\circ$) или отрицательным ($\phi_2 = -90^\circ = 270^\circ$) направлением вращения.

Таким образом, изменяя величину фазового сдвига МДС второй обмотки относительно первой, или, что то же самое, величину фазового сдвига тока в ней в пределах $-90^\circ \leq \phi_2 \leq 90^\circ$, можно сформировать в симметричной машине все возможные состояния магнитного поля от кругового с одним направлением вращения до кругового поля с противоположным направлением вращения и эллиптическим полем в промежутке между этими состояниями, которое вырождается в пульсирующее поле при нулевом сдвиге фаз. Такое воздействие на магнитное поле двухфазной машины называется *фазовым управлением*.

На рис. 2.7 показано влияние фазового сдвига на коэффициент формы эллипса. Единичные значения коэффициента соответствуют круговым полям прямого (+1) и обратного (-1) вращения, а нулевые – пульсирующему полю в машине.

Воздействовать на магнитное поле двухфазной машины можно также изменяя амплитуду МДС второй обмотки при оптимальном угловом и фазовом смещении, равном $\pi/2$. Подставляя эти условия в выражения (2.17), получим:

$$\underline{B}_{0+} = \underline{B}_{01+} + \underline{B}_{02+} = \frac{B_{m1}}{2} + \frac{aB_{m1}}{2} = \frac{B_{m1}}{2}[1+a];$$

$$\underline{B}_{0-} = \underline{B}_{01-} + \underline{B}_{02-} = \frac{B_{m1}}{2} - \frac{aB_{m1}}{2} = \frac{B_{m1}}{2}[1-a],$$

где $a = B_{m2} / B_{m1}$ – отношение амплитуд индукции второй и первой обмоток.

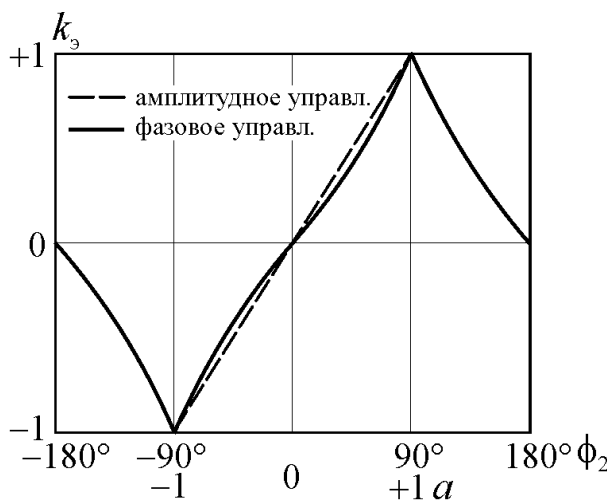


Рис. 2.7

Отсюда коэффициент формы эллипса годографа вектора результирующей индукции

$$k_{\dot{y}} = \frac{B_{0+} - B_{0-}}{B_{0+} + B_{0-}} = a.$$

Если диапазон изменения отношения амплитуд определить как $-1 \leq a \leq +1$, понимая под величиной $a = -1$ состояние, при котором МДС второй обмотки имеет амплитуду, равную амплитуде первой обмотки, но при этом смещена по фазе на 180° , то в

таких же пределах будет изменяться значение k_{φ} (рис. 2.7). Это означает, что изменением амплитуды МДС второй обмотки при постоянном оптимальном фазовом сдвиге, равном $\pm\pi/2$, можно управлять состоянием магнитного поля машины от кругового с отрицательным направлением вращения ($a = -1$) до кругового с положительным направлением вращения ($a = 1$), включая все промежуточные состояния, соответствующие эллиптическому полю, вплоть до пульсирующего поля при $a = 0$. Такой способ воздействия на магнитное поле двухфазной машины называется амплитудным управлением.

2.4. Высшие гармоники магнитного поля

Магнитное поле в электрических машинах создаётся катушками, уложенными в пазы магнитопровода. В простейшем случае одной катушки, лежащей в диаметрально противоположных пазах (рис. 2.8, а), распределение МДС и индукции в воздушном зазоре δ будет иметь вид прямоугольной волны (рис. 2.8, б):

$$B(\alpha) = \begin{cases} +B_m & |\alpha| \leq \pi/2 \\ -B_m & |\alpha| > \pi/2 \end{cases}.$$

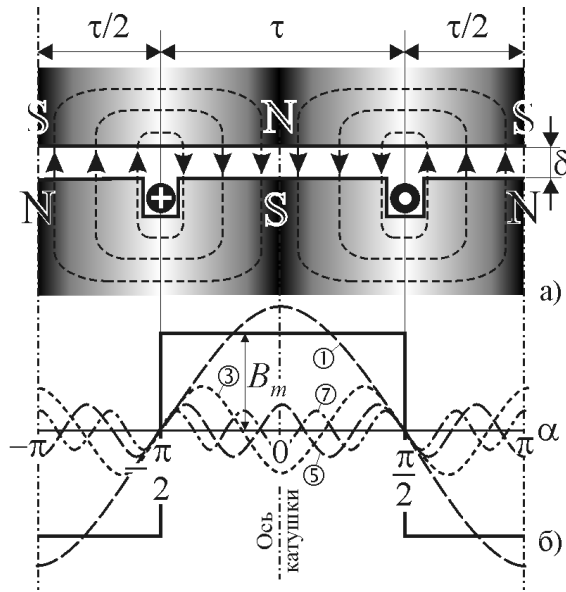
Такую волну можно разложить в бесконечный ряд нечётных гармоник, амплитуды которых уменьшаются пропорционально их номеру ν (рис. 2.8, б):

$$B(\alpha) = \frac{4B_m}{\pi} \sum_{\nu=1,3,5,\dots} \frac{1}{\nu} \cos \nu\alpha.$$

Если эту катушку подключить к источнику переменного синусоидального тока $i_e = I_m \cos \omega t$, то в машине будет сформировано пульсирующее магнитное поле с прямоугольным распределением индукции в зазоре. Для ν -й гармоники распределение индукции в этом случае будет синусоидальной функцией времени вида

$$B_{\nu}(\alpha, t) = \frac{4B_m}{\nu\pi} \cos \omega t \cos \nu\alpha = \frac{2B_m}{\nu\pi} \cos(\nu\alpha - \omega t) + \frac{2B_m}{\nu\pi} \cos(\nu\alpha + \omega t),$$

где $4B_m/(\nu\pi)$ – амплитуда гармоники. Таким образом, каждая гармоника создаст два круговых магнитных поля, вращающихся в противоположных направлениях с угловыми скоростями $\pm\omega/\nu$.



$$B_{v+} = \sum_{k=1}^n B_{vk+}; \quad B_{v-} = \sum_{k=1}^n B_{vk-},$$

при определённых условиях могут образовать симметричные ненулевые системы с нулевой суммой фазных величин. Эти условия определяются углами смещения в (2.21)

$$\begin{aligned} (k-1)(v-q)2\pi/n; \\ (k-1)(v+q)2\pi/n. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из выражений (2.22) следует, что в спектре магнитных полей машины сохраняются только те составляющие полей гармоник, для которых выполняется условие

$$(v \mp q)/n = s, \quad (2.23)$$

где $s = 0, 1, 2, 3, \dots$, т.к. они образуют симметричные системы нулевой последовательности, результирующие амплитуды индукции которых в n раз превышают амплитуду индукции соответствующей составляющей гармоники одной катушки. Причём, при ненулевых значениях q одновременное выполнение условий (2.22) невозможно. Значит, гармоники, для которых выполняется одно из этих условий будут формировать только одну составляющую, т.е. круговое магнитное поле с положительным или отрицательным направлением вращения. Все остальные составляющие полей гармоник образуют симметричные системы ненулевого порядка и в спектре отсутствуют.

Из условия (2.23) можно определить номера гармоник образующие круговые магнитные поля прямого или обратного вращения. Так как v является нечётным числом, то при питании катушек от симметричного n -фазного источника с прямым или обратным порядком чередования фаз, т.е. при $q = \pm 1$, для чётного числа катушек (фаз) номера гармоник определяются выражением

$$v = sn \pm 1, \quad (2.24)$$

а для нечётного – выражением

$$v = 2sn \pm 1. \quad (2.25)$$

Положительный знак в выражениях (2.24) и (2.25) соответствует номеру гармоники, формирующей круговое магнитное поле прямого вращения при прямом порядке чередования фаз источника питания и поле обратного вращения при обратном порядке чередования. Таким образом, изменение

порядка чередования фаз источника питания машины приводит к изменению направления вращения полей всех гармоник, включая основную.

Первое слагаемое в выражениях (2.24) и (2.25) соответствует числам кратным числу катушек (фаз) машины, а т.к. ν отличается от этих чисел, то можно сделать вывод о том, что спектр магнитных полей не будет содержать составляющих кратных числу фаз. Для машин с чётным числом катушек (фаз) это утверждение не имеет смысла, т.к. гармоник кратных чётному числу n , т.е. чётных гармоник, в спектре прямоугольной волны нет в принципе. У машин с нечётным числом фаз n целочисленное отношение нечётного порядка гармоники ν к n может быть только нечётным числом. Поэтому у таких машин независимо от порядка чередования фаз источника питания в спектре не будет полей, соответствующих номерам гармоник

$$\nu = n(2s + 1) \quad (2.26)$$

где $s = 0, 1, 2, 3, \dots$

Из выражений (2.24) и (2.25) следует, что у машин с чётным числом фаз ближайшая к основной гармоника, формирующая круговое магнитное поле, имеет порядок $\nu = n - 1$, а у машин с нечётным числом фаз – $\nu = 2n - 1$. Значит,

Таблица 2.1

Вращающиеся и пульсирующие магнитные поля электрической машины

$q=1$										
амплитуды гармоник	$n \backslash \nu$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$\langle\langle 2 \rangle\rangle$	1									
3	1									
4	1									
5	1									
6	1									
7	1									
8	1									

$q=0$										
амплитуды гармоник	$n \backslash \nu$	1	3	5	7	9	11	13	15	17
$\langle\langle 2 \rangle\rangle$	1									
3	1									
4	1									
5	1									
6	1									
7	1									
8	1									

↻, ↕ – обозначения круговых и пульсирующих полей высших гармоник

машины с нечётным числом фаз являются более эффективными фильтрами круговых полей высших гармоник (см. табл. 2.1).

В случае асимметрии питания и/или параметров катушек их МДС можно разложить на симметричные составляющие*. Тогда все полученные выше результаты будут справедливы для составляющих МДС прямой и обратной последовательности чередования фаз. Для анализа магнитных полей, создаваемых нулевой составляющей МДС катушек нужно в (2.22) положить $q = 0$. При этом оба выражения преобразуются к виду

$$(k-1)v2\pi/n.$$

Это означает, что в этом случае в спектре полей либо исключаются обе составляющие B_{vk+} и B_{vk-} , либо они присутствуют, но только вместе. Следовательно, *если номер гармоники кратен числу фаз (v/n – целое число), то она будет формировать в машине пульсирующее магнитное поле*, т.к. в этом случае обе составляющие образуют системы нулевого порядка и имеют одинаковые амплитуды. Вследствие того, что v является нечётным числом, целочисленное отношение v/n может быть только нечётным и только при условии, что n нечётное. Таким образом, *пульсирующие поля высших гармоник возможны только в машинах с нечётным числом катушек (фаз)* (см. табл. 2.1) и эти поля формируются гармониками, порядок которых определяется выражением (2.26).

Рассмотрим магнитные поля высших гармоник для наиболее распространённого частного случая трёхфазной машины. При питании от симметричного источника с прямым порядком чередования фаз $q = 1$, $n = 3$ и условие (2.25) приобретает вид

$$v = 6s \pm 1.$$

Следовательно, гармоники порядков $v = 1, 7, 13, 19 \dots$ создают круговые вращающиеся поля с положительным направлением вращения, а гармоники порядков $v = 5, 11, 17, 23 \dots$ – с отрицательным направлением вращения. Кроме этих гармоник спектр МДС содержит гармоники кратные числу фаз и имеющие в соответствии с (2.26) порядок $v = 3(2s + 1) = 3, 9, 15, 21 \dots$, но они при отсутствии нулевой составляющей у МДС обмоток не образуют результирующего магнитного поля. Однако если МДС обмоток будет содержать составляющую нулевого порядка, то эти гармоники сформируют в машине пульсирующие магнитные поля.

Для псевдосимметричных двухфазных машин при симметричном питании распределение индукции катушек (фаз) имеет вид функций

* см. раздел 1.9

$$\begin{aligned}
B_{v1}(\alpha, t) &= \frac{4B_m}{v\pi} \cos(\omega t) \cos v\alpha = \\
&= \frac{2B_m}{v\pi} \cos(v\alpha - \omega t) + \frac{2B_m}{v\pi} \cos(v\alpha + \omega t) = B_{v1+} + B_{v1-} \\
B_{v2}(\alpha, t) &= \frac{4B_m}{v\pi} \cos[\omega t - q\pi/2] \cos\{v[\alpha - \pi/2]\} = \\
&= \frac{2B_m}{v\pi} \cos[v\alpha - \omega t - (v - q)\pi/2] + \\
&+ \frac{2B_m}{v\pi} \cos[v\alpha + \omega t - (v + q)\pi/2] = B_{v2+} + B_{v2-}
\end{aligned} \tag{2.27}$$

а суммарная индукция полей прямого и обратного вращения

$$\begin{aligned}
B_{v+} &= B_{v1+} + B_{v2+} = \frac{2B_m}{v\pi} \left\{ \cos(v\alpha - \omega t) + \cos[v\alpha - \omega t - (v - q)\pi/2] \right\} = \\
&= \frac{4B_m}{v\pi} \left[\cos\left(v\alpha - \omega t - \frac{v - q}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{v - q}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right]; \\
B_{v-} &= B_{v1-} + B_{v2-} = \frac{2B_m}{v\pi} \left\{ \cos(v\alpha + \omega t) + \cos[v\alpha + \omega t - (v + q)\pi/2] \right\} = \\
&= \frac{4B_m}{v\pi} \left[\cos\left(v\alpha + \omega t - \frac{v + q}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{v + q}{2} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \right],
\end{aligned} \tag{2.28}$$

где $q = \pm 1$.

Так как v является нечётным числом, то множители $(v - q) = (v \mp 1)$ и $(v + q) = (v \pm 1)$ в выражениях (2.28) представляют собой чётные числа ближайšie к v , которые при делении на два дают соседние целые числа p и $p + 1$. Пусть одно из этих чисел, например, p чётное, тогда для него $\cos(p\pi/2) = \pm \cos \pi = \pm 1$. При этом другое число $p + 1$ будет нечётным и $\cos[(p + 1)\pi/2] = \pm \cos(\pi/2) = 0$. Значит, одна из составляющих, для которой p чётное, создаст круговое вращающееся магнитное поле, а вторая составляющая будет нулевой. Для последовательного ряда нечётных гармоник чётность и нечётность чисел p и $p + 1$ будет чередоваться, следовательно, будут чередоваться и направления вращения магнитных полей. Математически ряд гармоник можно представить выражением

$$v = 4s \pm 1, \tag{2.29}$$

где $s = 0, 1, 2, 3, \dots$, причём гармоники, соответствующие этому выражению с положительным знаком создают поля прямого вращения ($v = 1, 5, 9, 13, \dots$), а

гармоники, соответствующие отрицательному знаку ($v = 3, 7, 11, 15, \dots$) – поля обратного вращения (см. табл. 2.1).

При изменении порядка чередования фаз источника питания знак в (2.29) изменится на противоположный и, соответственно, противоположным будет направление вращения магнитных полей гармоник.

Определим амплитуду поля гармоники, например, для B_{v+} , полагая, что точка отсчёта угла перемещается по зазору с угловой скоростью ωt , т.е. $v\alpha = \omega t$. Тогда произведение в квадратных скобках (2.28), с учётом проведённого выше анализа чисел, будет равно $\cos(\mp\pi)\cos(\pm\pi) = 1$. Для составляющей поля обратного вращения B_{v-} аналогичными рассуждениями можно получить такой же результат. Следовательно, *амплитуды полей высших гармоник, создаваемых обеими катушками, будут равны $4B_m/(v\pi)$, т.е. равны амплитудам пульсирующих полей одной из катушек (фаз).*

Таким образом, *все высшие гармоники магнитного поля симметричной двухфазной машины при симметричном питании формируют круговые поля с чередующимся направлением вращения и амплитудами, уменьшающимися пропорционально номеру гармоники и равными амплитудам пульсирующих полей одной катушки (фазы).*

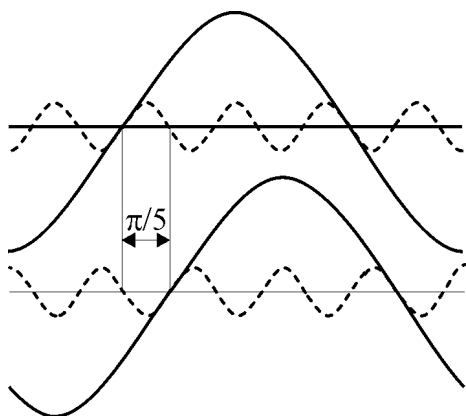


Рис. 2.9

Фазные обмотки реальных машин малой и средней мощности никогда не бывают сосредоточенными, т.е. состоящими из одной катушки. Каждая из них состоит из нескольких катушек, обычно уложенных в соседние пазы (см. рис. 2.2). Это делается для того, чтобы приблизить кривую распределения МДС в зазоре машины к синусоиде, а значит, подавить высшие гармоники. С этой целью, помимо распределения обмотки по пазам, используют также укорочение шага обмотки;

скос пазов и использование катушек с разным числом витков. В результате амплитуда отдельных пространственных гармоник уменьшается, а в некоторых случаях даже сводится к нулю. На рис. 2.9 показаны пространственные распределения основной и пятой гармоник двух катушек и видно, что взаимное смещение их осей на угол $\pi/5$ приводит к полной компенсации поля пятой гармоники, т.к. её волны оказываются в противофазе. Если обмотка состоит из трёх катушек, то пятую гармонику можно подавить, сместив катушки на угол $2\pi/15$. Тогда пятые гармоники образуют

симметричную систему с нулевой суммой. В общем случае спектр распределённой обмотки такой же, как у отдельной катушки, т.е. состоит из нечётных гармоник. Однако результирующее магнитное поле, образованное несколькими катушками, распределяется по воздушному зазору несколько иначе, чем у сосредоточенной обмотки. Поля высших гармоник катушек каждой фазы складываясь, смещаются относительно оси магнитного поля основной гармоники, но их межфазное положение остаётся неизменным. Поэтому *все результаты и выводы, полученные выше при анализе полей многофазных систем катушек, будут справедливы для многофазных систем распределённых обмоток.*

Современные электрические машины часто питаются от полупроводниковых преобразователей. В этом случае токи обмоток содержат высшие временные гармоники, действие которых можно исследовать по отдельности, полагая машину ненасыщенной и симметричной.

Каждая μ -я гармоника фазного тока ($\mu > 1$) будет модулировать амплитуду всех пространственных гармоник индукции соответствующей фазы точно также, как это делает основная гармоника, но с частотой $\omega_\mu = \mu\omega_1$, где ω_1 – частота основной гармоники тока. Если спектральный состав фазных токов одинаков и μ -я гармоника образует n -фазную симметричную систему, то пульсирующие поля высших фазных пространственных гармоник, сформируют в машине результирующие магнитные поля, характер которых, в зависимости от кратности фазового смещения q_μ , будет определяться условиями (2.24-2.26) и (2.29). При этом частоты вращения круговых полей будут равны

$$\omega_{\mu v} = \mu\omega_1 / v,$$

т.е. они могут быть меньше, больше или равны частоте вращения поля основной гармоники в зависимости от соотношения μ/v .

Таким образом, часть магнитных полей высших временных гармоник, номер которых равен номеру пространственных гармоник распределения индукции ($\mu = v$), вращается с той же частотой и в том же направлении, в котором вращается поле основной гармоники, т.е. эта часть полей неподвижна относительно ротора и поэтому не оказывает существенного влияния на работу машины. В то же время, другая часть полей, для которых $\mu \neq v$, вращается относительно ротора и индуцирует в его магнитопроводе, в успокоительных и пусковых обмотках синхронных машин, в обмотках роторов асинхронных машин токи, которые вызывают дополнительные потери энергии и нагрев машины.

Для анализа полей высших временных гармоник МДС достаточно во все выражения вместо ω подставить $\mu\omega_1$. Очевидно, что при этом сохранятся все результаты и выводы, полученные для основной гармоники.

3. Пространственные векторы в теории электрических машин и практике управления ими

3.1. Понятие обобщённого пространственного вектора

Современная теория электрических машин и электропривода строится на основе представления электромагнитных величин векторами. Это позволяет не только получить компактную запись уравнений, но также построить высокоэффективные системы управления, базирующиеся на векторных понятиях. Кроме того, векторы позволяют учесть взаимосвязь фазных величин, что совершенно необходимо для анализа процессов при питании машины от импульсных полупроводниковых преобразователей.

Большинство электрических машин переменного тока предназначено для работы в трехфазных сетях, поэтому они изготавливаются с симметричными трехфазными обмотками на статоре, причем МДС этих обмоток распределены в пространстве по закону близкому к синусоидальному, т.е. МДС, создаваемая k -й обмоткой в точке, отстоящей от оси этой обмотки на угол α_k равна – $F_k(\alpha) = F_{k0} \cos \alpha_k$, где F_{k0} – МДС, соответствующая оси k -й обмотки.

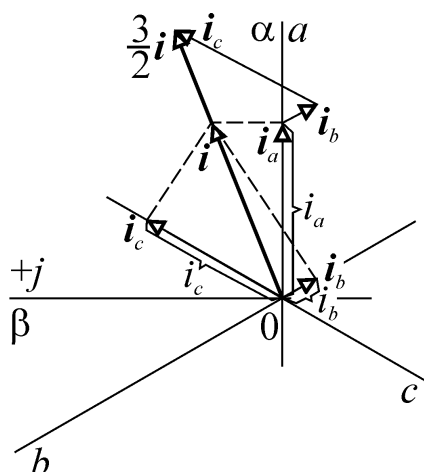


Рис. 3.1

Синусоидальность распределения позволяет представить МДС или пропорциональные им токи обобщённым пространственным вектором на плоскости, перпендикулярной оси ротора машины. В дальнейшем под обобщённым вектором мы будем понимать вектор, проекции которого на оси фазных обмоток в любой момент времени равны мгновенным значениям фазных величин, представляемых этим вектором.

Если ток в каждой обмотке представить вектором (i_a, i_b, i_c рис. 3.1), модуль которого равен мгновенному значению тока (i_a, i_b, i_c), а направление совпадает с осью обмотки, и сложить эти векторы, то мы получим пространственный вектор тока $\frac{3}{2}i$. Модуль этого вектора будет в полтора раза больше модуля вектора i , проекции которого на оси фазных обмоток равны мгновенным значениям фазных токов i_a, i_b, i_c . Следовательно, для того, чтобы вектор, полученный сложением фазных векторов, соответствовал данному выше определению, его нужно уменьшить в полтора раза, умножив на коэффициент $2/3$. В общем случае m -фазной системы обмоток модуль суммарного вектора в $m/2$ -раз больше модуля обобщённого вектора и, соответственно, коэффициент, на который нужно умножать результат суммирования равен $2/m$.

Действительно, операцию суммирования фазных векторов (например, векторов тока) можно представить в виде

$$\mathbf{i}_s = i_1 \mathbf{a}_1 + i_2 \mathbf{a}_2 + \dots + i_k \mathbf{a}_k \dots + i_m \mathbf{a}_m = i_1 + i_2 \mathbf{a}_{(m)} + \dots + i_k \mathbf{a}_{(m)}^{k-1} \dots + i_m \mathbf{a}_{(m)}^{m-1}$$

где: i_k – мгновенное значение тока в k -й фазе; $\mathbf{a}_k = \mathbf{a}_{(m)}^{k-1}$ – оператор k -й фазы;

$\mathbf{a}_{(m)} = e^{j \frac{2\pi}{m}}$ – оператор симметричной системы фазных токов.

Пусть для произвольного момента времени задан обобщённый вектор тока $\mathbf{i} = i_{\max} e^{j\vartheta}$, где $\vartheta = F(t)$ – угол между вектором $\mathbf{i}$ и вещественной осью. Тогда по определению фазные токи и фазные векторы равны

$$i_1 = i_{\max} \cos \vartheta; \dots i_k = i_{\max} \cos \left[\vartheta + (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \dots i_m = i_{\max} \cos \left[\vartheta + (m-1) \frac{2\pi}{m} \right]$$

$$\mathbf{i}_1 = i_1; \mathbf{i}_2 = i_2 \mathbf{a}_2 = i_2 \mathbf{a}_{(m)}^1 \dots \mathbf{i}_k = i_k \mathbf{a}_k = i_k \mathbf{a}_{(m)}^{k-1} \dots \mathbf{i}_m = i_m \mathbf{a}_{(m)}^{m-1}$$

Отсюда вектор, полученный геометрическим суммированием фазных токов, будет равен

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_s = i_1 + i_2 \mathbf{a}_{(m)} + \dots + i_m \mathbf{a}_{(m)}^{m-1} &= i_{\max} \left\{ \begin{aligned} &\cos \vartheta + \cos \left(\omega t + \gamma + \frac{2\pi}{m} \right) \mathbf{a}_{(m)} + \dots \\ &\dots + \cos \left[\vartheta + (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \mathbf{a}_{(m)}^{k-1} + \dots \\ &\dots + \cos \left[\vartheta + (m-1) \frac{2\pi}{m} \right] \mathbf{a}_{(m)}^{m-1} \end{aligned} \right\} = \\ &= i_{\max} \sum_{k=1}^m \left\{ \cos \left[\vartheta + (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \mathbf{a}_{(m)}^{k-1} \right\} = \\ &= i_{\max} \sum_{k=1}^m \left\{ \cos \left[\vartheta + (k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \cdot \left\{ \cos \left[(k-1) \frac{2\pi}{m} \right] + j \sin \left[(k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \right\} \right\} = \\ &= \frac{i_{\max}}{2} \sum_{k=1}^m \left\{ \cos \vartheta + j \sin \vartheta + \cos \left[2(k-1) \frac{2\pi}{m} \right] + j \sin \left[2(k-1) \frac{2\pi}{m} \right] \right\} = \\ &= \frac{i_{\max}}{2} \left[m \cdot e^{j\vartheta} + \sum_{k=1}^m \cancel{\mathbf{a}_{(m)}^{2(k-1)}} \right] = i_{\max} \frac{m}{2} e^{j\vartheta} = \frac{m}{2} \mathbf{i} \end{aligned}$$

(3.1)

Последнее преобразование суммы справедливо потому, что множитель 2 в показателе степени фазного оператора определяет порядок следования фаз и

не влияет на результат суммирования, т.е. $\sum_{k=1}^m \mathbf{a}_{(m)}^{2(k-1)} = \sum_{k=1}^m \mathbf{a}_{(m)}^{k-1}$, а из основного свойства симметричных систем (см. раздел 1.3) следует, что $\sum_{k=1}^m \mathbf{a}_{(m)}^{k-1} = 0$.

Таким образом, вектор $\mathbf{i}_s$, полученный в результате суммирования, превосходит по модулю обобщённый вектор $\mathbf{i}$ в $m/2$ раз, поэтому в m -фазной системе для получения обобщённого вектора результат суммирования нужно умножить на коэффициент $2/m$, т.е. $\mathbf{i} = 2\mathbf{i}_s / m$.

Для упрощения математических операций координаты точек на любой плоскости можно объединить в комплексные числа. Тогда, совместив вещественную ось плоскости обобщённых векторов с осью обмотки фазы a , можно записать описанные выше операции построения обобщённого вектора тока в виде

$$\mathbf{i} = \frac{2}{3}(\mathbf{i}_a + \mathbf{i}_b + \mathbf{i}_c) = \frac{2}{3}(i_a + i_b \mathbf{a} + i_c \mathbf{a}^2)^* \quad (3.2)$$

где $\mathbf{a} = e^{j2\pi/3} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ – оператор трехфазной системы, $\mathbf{i}_a = i_a$; $\mathbf{i}_b = i_b \mathbf{a}$; $\mathbf{i}_c = i_c \mathbf{a}^2$ – векторы фазных токов, а i_a, i_b, i_c – их мгновенные значения.**

Основное свойство симметрии фазных величин заключается в равенстве нулю суммы фазных операторов (см. раздел 1.3). Для трехфазной системы это очевидно из равенства $-\mathbf{a}^0 + \mathbf{a}^1 + \mathbf{a}^2 = 1 + \mathbf{a} + \mathbf{a}^2 = 1 - \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

При симметричном питании и прямом порядке следования фаз токи равны

$$i_{a+} = I_{m+} \sin(\omega t + \delta_+); \quad i_{b+} = I_{m+} \sin(\omega t + \delta_+ + 2\pi/3); \quad i_{c+} = I_{m+} \sin(\omega t + \delta_+ - 2\pi/3).$$

Подставляя эти значения в (3.2), мы получим годограф вектора тока

* Совмещение системы координат с осью одной из фазных обмоток выражается нулевой степенью соответствующего фазного оператора. Если, например, систему координат нужно совместить с осью фазы b , то обобщённый вектор будет определяться выражением $\mathbf{i} = 2(i_a \mathbf{a}^2 + i_b \mathbf{a}^0 + i_c \mathbf{a}^1)/3$

** Обозначение вектора строчным символом принято для указания на то, что его координаты являются функциями времени аналогично тому, как строчные символы при обозначении скалярных величин указывают на мгновенное значение.

$$\begin{aligned} \mathbf{i}_+ &= \frac{2I_{m+}}{3} \left[\begin{aligned} &\sin(\omega t + \delta_+) + \sin(\omega t + \delta_+ + 2\pi/3) \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \\ &+ \sin(\omega t + \delta_+ - 2\pi/3) \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \right] = \\ &= \frac{2I_{m+}}{3} \left[\frac{3}{2} \cos(\omega t + \delta_+) + j\frac{3}{2} \sin(\omega t + \delta_+) \right] = I_{m+} e^{j(\omega t + \delta_+)} = I_{m+} e^{j\delta_+} e^{j\omega t} = \underline{I}_+ e^{j\omega t} \end{aligned}$$

где $\underline{I}_+ = I_{m+} e^{j\delta_+}$ – комплексное число-вектор. Следовательно, в этом случае конец вектора тока перемещается в пространстве по окружности с радиусом равным амплитуде фазного тока I_{m+} с угловой частотой ω . При этом в начальный момент времени ($t = 0$) его угол с осью обмотки фазы a составляет δ_+ .

При обратном порядке следования фаз мгновенные значения токов будут определяться функциями

$$i_{a-} = I_{m-} \sin(\omega t + \delta_-); \quad i_{b-} = I_{m-} \sin(\omega t + \delta_- - 2\pi/3); \quad i_{c-} = I_{m-} \sin(\omega t + \delta_- + 2\pi/3)$$

и обобщённый вектор тока будет равен

$$\mathbf{i}_- = \frac{2I_{m-}}{3} \left[\frac{3}{2} \cos(\omega t + \delta_-) - j\frac{3}{2} \sin(\omega t + \delta_-) \right] = I_{m-} e^{-j(\omega t + \delta_-)} = I_{m-} e^{-j\delta_-} e^{-j\omega t} = \underline{I}_-^* e^{-j\omega t}$$

,
т.е. он будет описывать на плоскости окружность радиусом I_{m-} , вращаясь при этом в отрицательном направлении.

Из рассмотренного в разделе 1.9 метода симметричных составляющих следует, что любую несимметричную трехфазную систему питания можно представить суммой трех симметричных составляющих: прямой, обратной и нулевой последовательности

$$i_a = i_{a+} + i_{a-} + i_0; \quad i_b = i_{b+} + i_{b-} + i_0; \quad i_c = i_{c+} + i_{c-} + i_0$$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{I}_a = \underline{I}_+ + \underline{I}_- + \underline{I}_0; \quad \underline{I}_b = \mathbf{a}^2 \underline{I}_+ + \mathbf{a} \underline{I}_- + \underline{I}_0; \quad \underline{I}_c = \mathbf{a} \underline{I}_+ + \mathbf{a}^2 \underline{I}_- + \underline{I}_0 \quad (3.3)$$

значения которых определяются через векторы или комплексные амплитуды фазных токов как

$$\underline{I}_+ = (\underline{I}_a + \mathbf{a} \underline{I}_b + \mathbf{a}^2 \underline{I}_c) / 3; \quad \underline{I}_- = (\underline{I}_a + \mathbf{a}^2 \underline{I}_b + \mathbf{a} \underline{I}_c) / 3; \quad \underline{I}_0 = (\underline{I}_a + \underline{I}_b + \underline{I}_c) / 3.$$

(3.4)

Подставляя фазные токи (3.3) в (3.2), мы получим пространственный вектор тока

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= \frac{2}{3} \left[(i_{a+} + i_{a-} + i_0) + (i_{b+} + i_{b-} + i_0) \mathbf{a} + (i_{c+} + i_{c-} + i_0) \mathbf{a}^2 \right] = \\ &= \frac{2}{3} \left[(i_{a+} + i_{a-}) + (i_{b+} + i_{b-}) \mathbf{a} + (i_{c+} + i_{c-}) \mathbf{a}^2 + i_0 (1 + \mathbf{a} + \mathbf{a}^2) \right] = \mathbf{i}_+ + \mathbf{i}_- \end{aligned}$$

Это означает, что *обобщённый вектор тока не содержит нулевой составляющей и ее при анализе нужно учитывать особо*. Иными словами, *при любом виде асимметрии обобщённый вектор будет содержать только симметричные составляющие прямой и обратной последовательности*.

Пусть начальные фазы обеих составляющих равны нулю ($\delta_+ = \delta_- = 0$), тогда

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}_+ + \mathbf{i}_- = I_{m+} e^{j\omega t} + I_{m-} e^{-j\omega t} = (I_{m+} + I_{m-}) \cos \omega t + j(I_{m+} - I_{m-}) \sin \omega t.$$

Это выражение представляет собой параметрическое уравнение эллипса с полуосями, равными сумме и разности модулей составляющих прямой и обратной последовательности. При ненулевых начальных фазах в некоторый момент времени t векторы составляющих прямой и обратной последовательности ($\mathbf{i}_+$ и $\mathbf{i}_-$ на рис. 3.2.), вращаясь в противоположных направлениях, займут одинаковое положение, соответствующее большой оси эллипса. При этом будут выполняться соотношения

$$\begin{aligned} \gamma &= \delta_+ + \omega t - \pi; \quad \gamma = \pi - \omega t + \delta_- \\ &\Downarrow \\ \gamma &= (\delta_+ + \delta_-) / 2 \end{aligned}$$

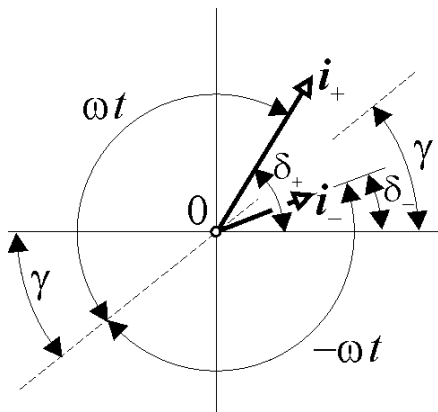


Рис. 3.2

Значит, большая ось эллипса годографа вектора тока будет располагаться на биссектрисе угла между начальными фазами, т.е. под углом γ к оси обмотки фазы a .

Таким образом, *при несимметричных фазных токах годографом пространственного вектора является эллипс, соотношение осей которого определяется степенью асимметрии*. Предельным видом этого годографа при отсутствии асимметрии будет окружность, а при равенстве составляющих прямой и обратной последовательности – отрезок прямой с

длиной равной двойному значению их модуля.

Рассмотрим в качестве примера некоторую произвольную систему фазных токов (рис. 3.3 а)

$$i_a = 1 \sin(\omega t + \pi/6); \quad i_b = 0,8 \sin(\omega t + 3\pi/4); \quad i_c = 1,5 \sin(\omega t - 5\pi/3).$$

В соответствии с (3.5) симметричные составляющие этой системы равны

$$\underline{I}_+ = 0,704 e^{-j0,84}; \quad \underline{I}_- = 0,24 e^{j1,38}; \quad \underline{I}_0 = 0,651 e^{j0,93}.$$

Годографом вектора тока будет эллипс с большой и малой полуосями $A = 0,704 + 0,24 = 0,944$; $B = 0,704 - 0,24 = 0,463$ и наклоном большой оси $(1,38 + 0,84) / 2 = 1,11$ ($63,5^\circ$).

Если подставить исходные фазные токи в выражение (3.2) и определить обобщённый вектор $\mathbf{i}$, а затем найти его проекции на фазные оси (см. ниже), то мы получим фазные токи

$$i'_a = 0,591\sin(\omega t - 0,51); i'_b = 0,942\sin(\omega t - 2,9); i'_c = 0,649\sin(\omega t + 0,91),$$

существенно отличающиеся от исходных (рис. 3.3 а), т.к. они не содержат нулевой составляющей (рис. 3.3 б).

Для несинусоидальных величин также можно построить годограф обобщённого вектора. Пусть, например, рассмотренные выше несимметричные токи содержат также третью гармонику

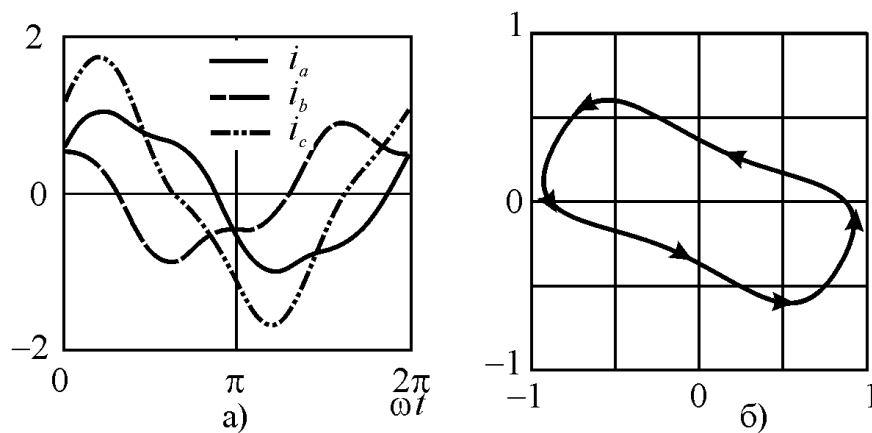


Рис. 3.4

$$i_a = 1\sin(\omega t + \pi/6) + 0,15\sin(3\omega t + \pi/6);$$

$$i_b = 0,8\sin(\omega t + 3\pi/4) + 0,2\sin(3\omega t - \pi/8);$$

$$i_c = 1,5\sin(\omega t - 5\pi/3) + 0,25\sin(3\omega t - \pi/6)$$

(рис. 3.4 а). Подставляя эти значения в (3.2), мы получим координаты вектора $\mathbf{i}$ и можем построить его годограф (рис. 3.4 б). Этот годограф сводится к сумме кривых второго порядка, соответствующих каждой гармонической составляющей фазных токов.

Обобщённый вектор, как и любой вектор на плоскости, можно представить через координаты точки его конца или, что то же самое, через его проекции на оси координат, объединённые алгебраической

формой записи комплексного числа. Если оси вещественной и мнимой

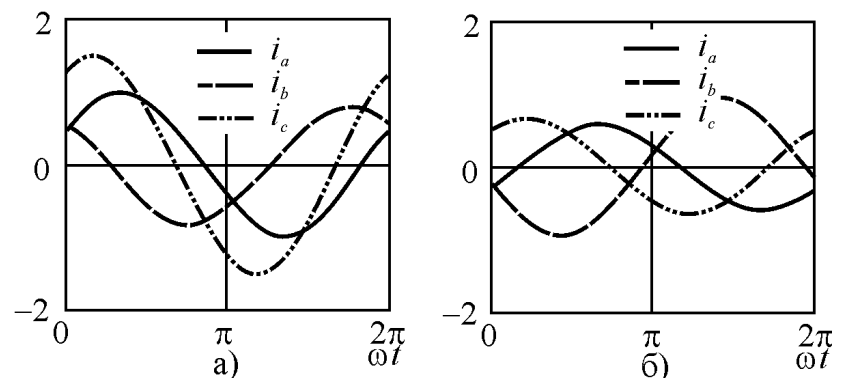


Рис. 3.3.

составляющих обозначить, как α и β (рис. 3.1), то обобщённый вектор тока будет равен

$$\mathbf{i} = i_\alpha + j i_\beta.$$

Подставляя в выражение (3.2) значения оператора системы, записанные в алгебраической форме, и разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$i_\alpha = \operatorname{Re}(\mathbf{i}) = \frac{2}{3} \left(i_a - \frac{i_b - i_c}{2} \right); \quad i_\beta = \operatorname{Im}(\mathbf{i}) = \frac{i_b - i_c}{\sqrt{3}}$$

Переход от представления обобщённого вектора проекциями на оси фазных обмоток к представлению его проекциями на ортогональные оси комплексной плоскости эквивалентно преобразованию трехфазной системы обмоток в двухфазную. В матричной форме эти преобразования координат с учётом $i_0 = (i_a + i_b + i_c)/3$ можно записать как

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

При отсутствии нулевого провода $i_a + i_b + i_c = 0$. Тогда для определения проекций на оси $\alpha\beta$ достаточно использовать два фазных тока –

$$\begin{aligned} i_\alpha &= i_a; \\ i_\beta &= \frac{i_a + 2i_b}{\sqrt{3}} \Big|_{i_c = -i_a - i_b} = -\frac{i_a + 2i_c}{\sqrt{3}} \Big|_{i_b = -i_a - i_c} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Пользуясь известными геометрическими понятиями, обобщённый вектор можно представить также во вращающейся системе координат. Переход к новой системе координат xu , развернутой относительно исходной $\alpha\beta$ на некоторый угол ϑ (рис. 3.5), осуществляется из очевидного соотношения аргументов комплексных чисел следующим образом:

$$\mathbf{i}^{(\alpha\beta)} = \mathbf{i}_m e^{j\alpha^{(\alpha\beta)}} = \mathbf{i}_m e^{j[\alpha^{(xy)} + \vartheta]} = \mathbf{i}_m e^{j\alpha^{(xy)}} e^{j\vartheta} = \mathbf{i}^{(xy)} e^{j\vartheta} \Leftrightarrow \mathbf{i}^{(xy)} = \mathbf{i}^{(\alpha\beta)} e^{-j\vartheta}$$

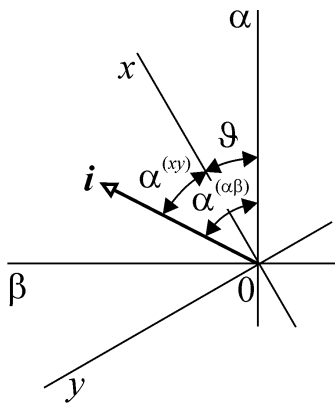


Рис. 3.5

При этом на угол ϑ не накладывается никаких ограничений, т.е. он может иметь постоянное значение, но может также изменяться произвольным образом. Для системы координат вращающейся с угловой частотой ω он равен $\vartheta = \omega t$. Таким образом, если под $e^{j\vartheta} = e^{j\omega t}$ понимать оператор вращения, то переход к неподвижной системе координат $\alpha\beta$ осуществляется умножением на оператор прямого вращения $e^{j\omega t}$, а к вращающейся xy – умножением на оператор

обратного вращения $e^{-j\omega t}$

В развернутом виде преобразование координат $\alpha\beta \rightarrow xy$ можно записать как

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^{(xy)} &= i_x + j i_y = (i_\alpha + j i_\beta) e^{-j\vartheta} = \\ &= (i_\alpha + j i_\beta) [\cos(-\vartheta) + j \sin(-\vartheta)] \end{aligned}$$

Разделяя вещественную и мнимую часть, можно представить связь между составляющими обобщённого вектора тока в различных системах координат в виде

$$\begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} \quad (3.7)^*$$

Преобразование системы координат является одной из важнейшей функций, используемых в современных системах управления приводом, которая позволяет изменить характер фазных величин. Пусть, например, рассматриваемая нами система токов содержит только составляющую прямой последовательности с частотой ω , т.е. фазные токи симметричны и $\mathbf{i}^{(\alpha\beta)} = \mathbf{i}_+$.

Тогда умножением на оператор вращения $e^{-j\omega t}$ вектор тока можно представить в синхронно вращающейся системе координат

$$\mathbf{i}^{(\alpha\beta)} e^{-j\omega t} = \mathbf{i}_+ e^{-j\omega t} = I_{m+} e^{j(\omega t + \delta_+)} e^{-j\omega t} = I_{m+} e^{j\delta_+} = \mathbf{i}^{(xy)}.$$

В результате преобразования фазные токи или проекции обобщённого вектора на координатные оси будут постоянными величинами

$$i_x = I_{m+} \cos \delta_+; \quad i_y = I_{m+} \sin \delta_+.$$

* В англоязычной литературе это преобразование координат называют преобразованием Парка (Park)

Если же синхронную систему координат сориентировать по вектору тока, т.е. использовать оператор вращения $e^{-j(\omega t + \delta_+)}$, то проекция i_y будет равна нулю, а x -проекция станет равной модулю вектора $i_x = I_{m+}$.

С помощью обратных преобразований можно синтезировать вектор с заданными параметрами, т.е. модулем, начальной фазой и частотой вращения. Для этого нужно задать значения x и y проекций, а затем преобразовать их в неподвижную систему координат в соответствии с (3.7), где $\vartheta = \omega t$. При этом постоянные величины i_x и i_y в новой системе координат определяют амплитуду

$I_m = \sqrt{i_x^2 + i_y^2}$ и начальную фазу $\delta = \arctg(i_y / i_x)$ синусоидальных фазных токов $i_\alpha = I_m \cos(\omega t + \delta)$; $i_\beta = I_m \sin(\omega t + \delta)$, частота которых ω должна быть задана аргументом тригонометрических функций в преобразовании (3.7).

При асимметрии фазных токов переход к прямо вращающейся системе координат даст нам проекции

$$\begin{aligned} \mathbf{i}^{(\alpha\beta)} e^{-j\omega t} &= \left[\mathbf{i}_+^{(\alpha\beta)} + \mathbf{i}_-^{(\alpha\beta)} \right] e^{-j\omega t} = \left[I_{m+} e^{j(\omega t + \delta_+)} + I_{m-} e^{-j(\omega t + \delta_-)} \right] e^{-j\omega t} = \\ &= I_{m+} e^{j\delta_+} + I_{m-} e^{-j(2\omega t + \delta_-)} = \mathbf{i}^{(xy)} \\ &\quad \Downarrow \end{aligned}$$

$$i_x = I_{m+} \cos \delta_+ + I_{m-} \cos(2\omega t + \delta_-); \quad i_y = I_{m+} \sin \delta_+ - I_{m-} \sin(2\omega t + \delta_-)$$

т.е. фазные проекции будут содержать помимо постоянных значений, соответствующих составляющей тока прямой последовательности, также и синусоидальные функции времени с двойной частотой, соответствующие составляющей обратной последовательности.

Обобщёнными векторами можно представить также ЭДС e , напряжения u и потокосцепления ψ , при этом все свойства рассмотренного выше обобщённого вектора тока будут присущи и этим векторам.

3.2. Модель электрической машины

3.2.1. Потокосцепления электрической машины

Если пренебречь насыщением магнитопровода электрической машины и считать воздушный зазор равномерным, то магнитные потоки, сцепляющиеся с её обмотками, будут пропорциональны соответствующим МДС. Рассмотрим основные соотношения между этими величинами. Допустим, что на статоре и роторе машины расположены симметричные трёхфазные обмотки, и параметры обмотки ротора приведены к обмотке статора. Схематически эти обмотки показаны на рисунке 3.6.

С обмоткой фазы *a* статора сцепляются магнитные потоки, создаваемые как ею самой, так и всеми остальными обмотками. Часть магнитного потока, создаваемого обмоткой сцепляется только с её собственными витками и

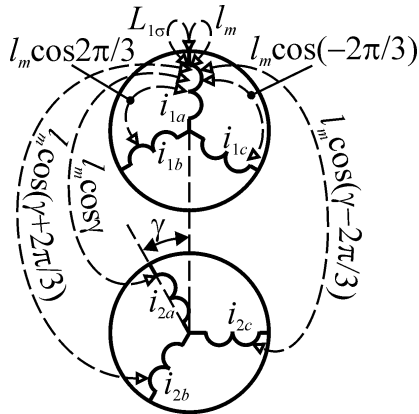


Рис. 3.6

называется *поток рассеяния*. Другая часть, помимо собственных витков охватывает также витки других обмоток и называется *главным или основным магнитным потоком*. Индуктивность $L_{1\sigma}$, связывающая поток рассеяния обмотки с протекающим в ней током, называется *индуктивностью рассеяния*, а индуктивность l_m , определяющая потокосцепление с основным потоком – взаимной индуктивностью или *индуктивностью основного потока*. При отсутствии токов в обмотках ротора можно

представить потокосцепление фазы *a* в виде

$$\Psi_{11a} = L_{1\sigma} i_{1a} + l_m i_{1a} + M_{ab} i_{1b} + M_{ac} i_{1c} \quad (3.8)$$

где M_{ab} и M_{ac} – взаимные индуктивности статорных обмоток.

Если две обмотки статора машины имеют одинаковые параметры, то магнитный поток, создаваемый током второй обмоткой и сцепляющийся с витками первой, будет полностью идентичен потоку, создаваемому первой обмоткой и сцепляющимся с витками второй, при условии равенства токов и совпадения расположения осей двух обмоток в пространстве. Очевидно, что при этих условиях картина магнитного поля будет одинаковой независимо от того, по какой из обмоток протекает ток, т.е. *индуктивность основного потока статорных обмоток l_m будет равна их взаимной индуктивности при условии совмещения геометрических осей*.

Смещение осей обмоток в пространстве на угол δ вызовет изменение их взаимной индуктивности пропорциональное косинусу угла сдвига, т.е. $M = M_0 \cos \delta = l_m \cos \delta$, где $M_0 = l_m$ – взаимная индуктивность обмоток при совмещении их осей. Выражение (3.8) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \Psi_{11a} &= L_{1\sigma} i_{1a} + l_m i_{1a} + l_m \cos 2\pi/3 \cdot i_{1b} + l_m \cos(-2\pi/3) \cdot i_{1c} = i_{1a} (L_{1\sigma} + 3l_m/2) = \\ &= i_{1a} (L_{1\sigma} + L_m) = i_{1a} L_1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Индуктивность $L_1 = L_{1\sigma} + L_m$ соответствует полной индуктивности статорной обмотки, включающей ее индуктивность от потока рассеяния $L_{1\sigma}$, индуктивность от части основного магнитного потока, созданного самой обмоткой l_m , и индуктивность от части основного потока, созданной двумя другими обмотками статора $l_m/2$. Таким образом, *полная индуктивность*

обмотки статора от основного магнитного потока L_m в $3/2$ раза больше ее индуктивности l_m , рассчитанной при отсутствии токов в других обмотках.*

В силу симметрии статора, для других обмоток можно записать аналогичные выражения – $\psi_{11b} = i_{1b}L_1$ и $\psi_{11c} = i_{1c}L_1$, а затем объединить фазные проекции в обобщенный вектор потокоцепления статора при отсутствии токов ротора –

$$\psi_{11} = \frac{2}{3}(\psi_{11a} + \psi_{11b}\mathbf{a} + \psi_{11c}\mathbf{a}^2) = \frac{2}{3}L_1(i_{1a} + i_{1b}\mathbf{a} + i_{1c}\mathbf{a}^2) = L_1\mathbf{i}_1 \quad (3.10)$$

Наличие токов в обмотках ротора приведет к появлению дополнительных составляющих потокоцеплений обмоток статора. Если ось фазы a ротора смещена в пространстве на некоторый угол γ (см. рис. 3.6), то взаимные индуктивности обмоток ротора и фазы a статора можно определить через соответствующие углы, образуемые их осями, в виде –

$$M_{aa} = M_{0a} \cos \gamma; \quad M_{ba} = M_{0b} \cos(\gamma + 2\pi/3); \quad M_{ca} = M_{0c} \cos(\gamma - 2\pi/3)$$

где M_{0a} , M_{0b} , M_{0c} – взаимные индуктивности обмоток при $\gamma = 0$. Но взаимная индуктивность обмоток статора и ротора при нулевом смещении осей равна l_m , т.к. параметры обмоток ротора приведены к статорным и можно считать, что при совпадении их осей картина магнитного поля будет такой же, как при совпадении осей статорных обмоток. Поэтому $M_{0a} = M_{0b} = M_{0c} = M_0 = l_m$ и

$$M_{aa} = l_m \cos \gamma; \quad M_{ba} = l_m \cos(\gamma + 2\pi/3); \quad M_{ca} = l_m \cos(\gamma - 2\pi/3)$$

Тогда полное потокоцепление обмотки фазы a статора при наличии токов ротора с учетом (3.1) будет

$$\psi_{12a} = M_{aa}i_{2a} + M_{ba}i_{2b} + M_{ca}i_{2c} = 3l_m i_{2a} \cos \gamma / 2 = L_m i_{2a} \cos \gamma$$

и по аналогии для двух других фаз:

$$\psi_{12b} = M_{ab}i_{2a} + M_{bb}i_{2b} + M_{cb}i_{2c} = L_m i_{2b} \cos(\gamma + 2\pi/3);$$

$$\psi_{12c} = M_{ac}i_{2a} + M_{bc}i_{2b} + M_{cc}i_{2c} = L_m i_{2c} \cos(\gamma - 2\pi/3).$$

По этим проекциям можно построить вектор потокоцепления статора с ротором

$$\begin{aligned} \psi_{12} &= \frac{2}{3}(\psi_{12a} + \psi_{12b}\mathbf{a} + \psi_{12c}\mathbf{a}^2) = \\ &= \frac{2}{3}L_m [i_{2a} \cos \gamma + i_{2b} \cos(\gamma + 2\pi/3)\mathbf{a} + i_{2c} \cos(\gamma - 2\pi/3)\mathbf{a}^2] = L_m \mathbf{i}_2 e^{j\gamma} \end{aligned}$$

и, суммируя с ψ_{11} из (3.10), получить общее потокоцепление статора, соответствующее режиму протекания токов в обмотках статора и ротора

* В общем случае в $m/2$ раз. См. свойства суммы (3.1).

$$\Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 \mathbf{i}_1 + L_m \mathbf{i}_2 e^{j\gamma} \quad (3.11)$$

В силу симметрии связей между статором и ротором аналогичное выражение можно записать для потокосцепления ротора с учетом того, что для него угол γ будет отрицательным, т.к. по отношению к статору этот угол отсчитывается в отрицательном направлении –

$$\Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22} = L_m \mathbf{i}_1 e^{-j\gamma} + L_2 \mathbf{i}_2 \quad (3.12)$$

В выражениях (3.11) и (3.12) векторы тока статора и ротора записаны в различных системах координат. В первом выражении ток статора записан в неподвижной системе координат $\alpha\beta$, связанной со статором, а ток ротора во вращающейся (смещенной на текущий угол γ) системе координат uv , связанной с ротором, т.е. в полной записи с индексами систем координат –

$$\begin{aligned} \Psi_1^{(\alpha\beta)} &= L_1 \mathbf{i}_1^{(\alpha\beta)} + L_m \mathbf{i}_2^{(uv)} e^{j\gamma} = L_1 \mathbf{i}_1^{(\alpha\beta)} + L_m \mathbf{i}_2^{(\alpha\beta)} \\ \Psi_2^{(uv)} &= L_m \mathbf{i}_1^{(\alpha\beta)} e^{-j\gamma} + L_2 \mathbf{i}_2^{(uv)} = L_m \mathbf{i}_1^{(uv)} + L_2 \mathbf{i}_2^{(uv)} \end{aligned}$$

Если обе части уравнения потокосцепления ротора умножить на оператор поворота $e^{j\gamma}$, то оно будет преобразовано в систему координат статора $\alpha\beta$ и примет вид

$$\Psi_2^{(uv)} e^{j\gamma} = L_m \mathbf{i}_1^{(uv)} e^{j\gamma} + L_2 \mathbf{i}_2^{(uv)} e^{j\gamma} = \Psi_2^{(\alpha\beta)} = L_m \mathbf{i}_1^{(\alpha\beta)} + L_2 \mathbf{i}_2^{(\alpha\beta)}.$$

Таким образом, форма уравнений для обобщённых векторов потокосцеплений не зависит от выбора системы координат и индексы системы в них можно опустить. Тогда окончательно потокосцепления статора и ротора с учетом всех токов машины можно представить в виде

$$\begin{aligned}\psi_1 &= L_1 i_1 + L_m i_2 = \psi_{11} + \psi_{12} \\ \psi_2 &= L_m i_1 + L_2 i_2 = \psi_{21} + \psi_{22} \\ (3.13)\end{aligned}$$

Из выражений (3.13) следует, что потокосцепления статора и ротора раскладываются на составляющие, обусловленные собственным током (ψ_{11} и ψ_{22}) и током другой части машины (ψ_{12} и ψ_{21}) (рис. 3.7 а).

Пользуясь тем, что сумма токов статора и ротора образует ток намагничивания машины, т.е. $i_1 + i_2 = i_m$, потокосцепления можно также представить через основной магнитный поток $\psi_m = L_m i_m = L_m (i_1 + i_2)$ и потоки рассеяния статора $\psi_{1\sigma} = L_{1\sigma} i_1$ и ротора $\psi_{2\sigma} = L_{2\sigma} i_2$ (рис. 3.7 б)) –

$$\begin{aligned}\psi_1 &= (L_{1\sigma} + L_m) i_1 + L_m i_2 = L_{1\sigma} i_1 + L_m (i_1 + i_2) = L_{1\sigma} i_1 + L_m i_m = \psi_{1\sigma} + \psi_m \\ \psi_2 &= L_m i_1 + (L_{2\sigma} + L_m) i_2 = L_m (i_1 + i_2) + L_{2\sigma} i_2 = L_m i_m + L_{2\sigma} i_2 = \psi_m + \psi_{2\sigma} \\ (3.14)\end{aligned}$$

Асимметрия параметров машины и/или источника питания при наличии нулевого провода приводит к появлению в обмотках статора токов нулевой последовательности. Но для нулевой составляющей справедливо $i_{a0} = i_{b0} = i_{c0} = i_0$, поэтому, подставляя эти значения в (3.9), получим для фазы а статора

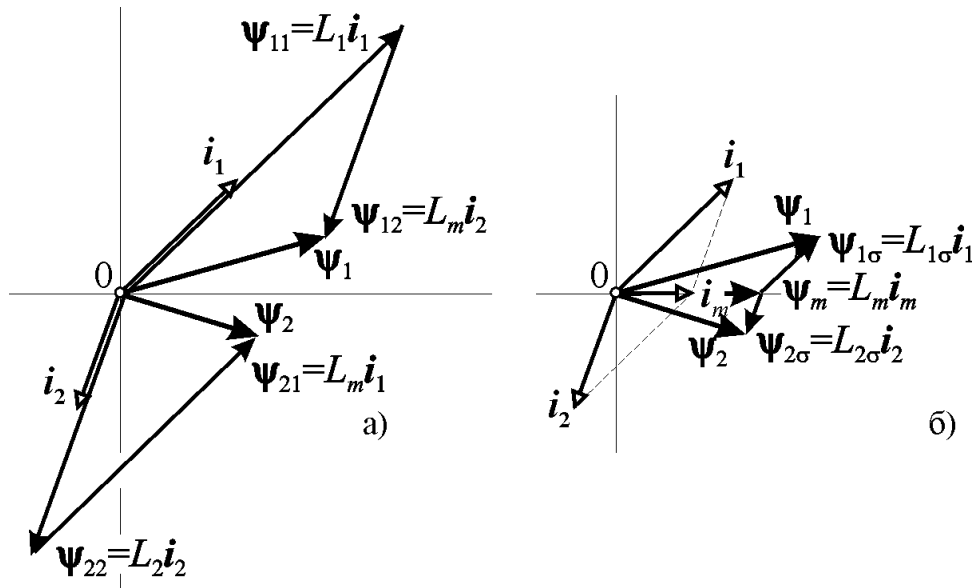


Рис. 3.7

$$\begin{aligned}\psi_{1a0} &= L_{1\sigma} i_{1a0} + l_m i_{1a0} + l_m \cos 2\pi/3 \cdot i_{1b0} + l_m \cos(-2\pi/3) \cdot i_{1c0} = \\ &= i_0 (L_{1\sigma} + l_m - l_m/2 - l_m/2) = i_0 L_{1\sigma}\end{aligned}$$

Очевидно, что аналогичные выкладки для потокосцеплений рассеяния обмоток фаз *b* и *c* приведут к такому же результату, т.е.

$\psi_{1a0} = \psi_{1b0} = \psi_{1c0} = L_{1\sigma} i_0$. Таким образом, потокосцепления составляющих нулевой последовательности для всех обмоток одинаковы и определяются индуктивностью рассеяния $L_{1\sigma}$.

3.2.2. Уравнения статора и ротора в векторной форме

Уравнения Кирхгофа для фазных напряжений статора машины имеют вид

$$u_{1a} = i_{1a} r_1 + \frac{d\psi_{1a}}{dt}; \quad u_{1b} = i_{1b} r_1 + \frac{d\psi_{1b}}{dt}; \quad u_{1c} = i_{1c} r_1 + \frac{d\psi_{1c}}{dt} *$$

Перейдем к векторной форме записи, умножив второе уравнение на $\mathbf{a}$, третье на $\mathbf{a}^2$, а затем складывая все три уравнения.

$$\frac{2}{3}(u_{1a} + u_{1b}\mathbf{a} + u_{1c}\mathbf{a}^2) = \frac{2}{3}(i_{1a} + i_{1b}\mathbf{a} + i_{1c}\mathbf{a}^2)r_1 + \frac{2}{3}\frac{d}{dt}(\psi_{1a} + \psi_{1b}\mathbf{a} + \psi_{1c}\mathbf{a}^2)$$

В результате мы получим уравнение в векторной форме

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{i}_1 r_1 + \frac{d\psi_1}{dt} \quad (3.15)$$

Аналогичные преобразования можно выполнить в системе координат uv , вращающейся синхронно с ротором, и получить

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{i}_2 r_2 + \frac{d\psi_2}{dt} \quad (3.16)$$

Уравнения (3.15) и (3.16) записаны в разных системах координат. Для записи уравнения (3.16) в неподвижной системе координат $\alpha\beta$ умножим его на оператор поворота $e^{j\vartheta} = e^{j\omega t}$, где $\omega = d\vartheta/dt$ – текущая частота вращения ротора, и представим потокосцепление ротора как $\psi_2^{(uv)} = \psi_2^{(\alpha\beta)} e^{-j\omega t}$

$$\mathbf{u}_2^{(uv)} e^{j\omega t} = \mathbf{i}_2^{(uv)} e^{j\omega t} r_2 + e^{j\omega t} d(\psi_2^{(\alpha\beta)} e^{-j\omega t})/dt.$$

Опуская после преобразований индексы системы координат, получим

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{i}_2 r_2 + \frac{d\psi_2}{dt} - j\omega\psi_2. \quad (3.17)$$

Переход к неподвижной системе координат в уравнении ротора привел к разделению слагаемого, соответствующего ЭДС индукции, на две составляющие. Первая составляющая $d\psi_2/dt$ связана с изменением потокосцепления во времени вследствие изменения во времени токов и называется *ЭДС трансформации*, по аналогии с процессом ее возбуждения в соответствующей электрической машине. Вторая – $\omega\psi_2$ связана с изменением потокосцепления вследствие вращения ротора и называется *ЭДС вращения*. Разложение ЭДС индукции на составляющие является математической операцией, связанной с преобразованием системы координат при условии инвариантности мощности, но в некоторых случаях его можно истолковать, исходя из физических процессов в машине.

* При наличии нулевых составляющих к этим выражениям следует добавить уравнение $u_{10} = i_{10} r_1 + \frac{d\psi_{10}}{dt}$.

Уравнения (3.15) и (3.17) записаны в неподвижной системе координат и их можно объединить для решения в общую систему. Кроме того, оба уравнения можно представить в некоторой произвольной системе координат mn , вращающейся с угловой частотой $\omega^{(mn)}$. Для этого нужно проделать преобразования аналогичные преобразованиям, выполненным при выводе выражения (3.17), в результате мы получим уравнения статора и ротора электрической машины –

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{(mn)} &= r_1 \mathbf{i}_1^{(mn)} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_1^{(mn)}}{dt} + j\omega^{(mn)} \boldsymbol{\Psi}_1^{(mn)} \\ \mathbf{u}_2^{(mn)} &= r_2 \mathbf{i}_2^{(mn)} + \frac{d\boldsymbol{\Psi}_2^{(mn)}}{dt} + j[\omega^{(mn)} - \omega] \boldsymbol{\Psi}_2^{(mn)} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Уравнения (3.18) позволяют получить переход к любой системе координат простой подстановкой соответствующей частоты вращения $\omega^{(mn)}$.

Выражения (3.18) показывают, что *выбором системы координат можно, исключить ЭДС вращения, но только в одном из уравнений*. Полагая $\omega^{(mn)} = 0$, мы получим уравнения в неподвижной системе координат и исключим ЭДС вращения в уравнении статора, а в системе координат, вращающейся синхронно с ротором ($\omega^{(mn)} = \omega$), ЭДС вращения обращается в нуль в уравнении ротора.

При выборе системы координат следует учитывать, что в любой электрической машине угловые скорости вращения магнитных полей статора Ω_1 и ротора Ω_2 связаны с угловой скоростью вращения вала ротора Ω соотношением – $\Omega_1 = \Omega \pm \Omega_2$, где положительный знак соответствует согласному направлению вращения. Но скорости вращения полей статора и ротора определяются частотами соответствующих токов и числом пар полюсов обмоток z_p^* , т.е. $\Omega_1 = \omega_1 / z_p$ и $\Omega_2 = \omega_2 / z_p$, где ω_1 и ω_2 – частоты токов статора и ротора. Отсюда

$$\omega_1 = \Omega \cdot z_p \pm \omega_2 = \omega \pm \omega_2$$

где $\omega = \Omega \cdot z_p$ – угловая скорость вращения ротора электрической машины с одной парой полюсов.

3.2.3. Обобщённая электрическая машина

Уравнения (3.18) можно графически представить электрической схемой, показанной на рис. 3.8. Она отличается от схемы замещения трансформатора наличием источников ЭДС вращения в цепях статора и ротора.

Подставляя в уравнения (3.18) векторы в форме комплексных чисел

* см. раздел 2.1

$$u_{1m} + ju_{1n} = r_1(i_{1m} + ji_{1n}) + \frac{d}{dt}(\psi_{1m} + j\psi_{1n}) + j\omega^{(mn)}(\psi_{1m} + j\psi_{1n});$$

$$u_{2m} + ju_{2n} = r_2(i_{2m} + ji_{2n}) + \frac{d}{dt}(\psi_{2m} + j\psi_{2n}) + j[\omega^{(mn)} - \omega](\psi_{2m} + j\psi_{2n})$$

и разделяя вещественную и мнимую части, мы получим уравнения проекций

$$\begin{aligned} u_{1m} &= r_1 i_{1m} + \frac{d\psi_{1m}}{dt} - \omega^{(mn)} \psi_{1n}; & u_{1n} &= r_1 i_{1n} + \frac{d\psi_{1n}}{dt} + \omega^{(mn)} \psi_{1m}; \\ u_{2m} &= r_2 i_{2m} + \frac{d\psi_{2m}}{dt} - [\omega^{(mn)} - \omega] \psi_{2n}; & u_{2n} &= r_2 i_{2n} + \frac{d\psi_{2n}}{dt} + [\omega^{(mn)} - \omega] \psi_{2m} \end{aligned}$$

(3.19)

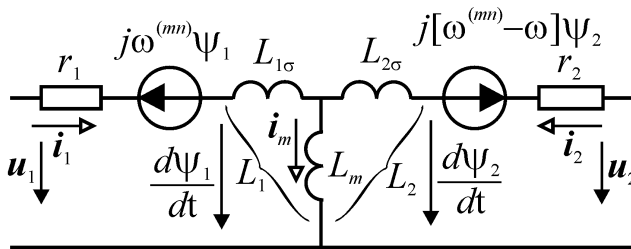


Рис. 3.8

Из (3.19) следует, что в произвольно вращающейся системе координат ЭДС вращения представлены в уравнениях разноименными проекциями, что приводит к появлению перекрестных связей в структуре модели машины и

существенно затрудняет анализ и синтез систем управления.

Проекции векторов на оси координат можно рассматривать как величины, соответствующие обмоткам, расположенным на взаимно-перпендикулярных осях. В этом случае уравнения (3.19) будут соответствовать двухфазной электрической машине с одной парой полюсов, модель которой показана на рис. 3.9. Такая электрическая машина называется обобщённой (ОЭМ).

Если уравнения статора и ротора представлены в собственных системах

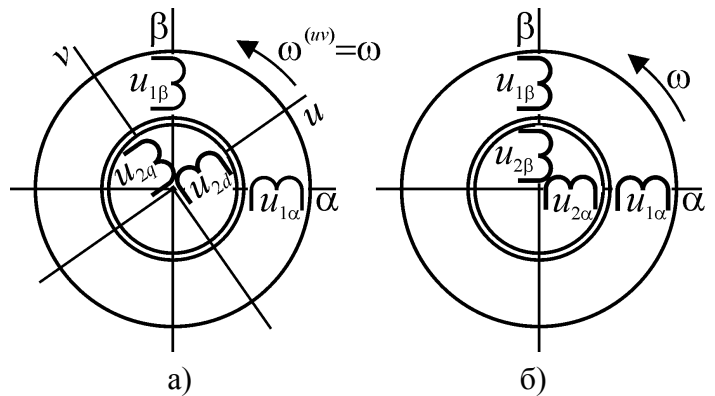


Рис. 3.9.

координат, то модель ОЭМ будет соответствовать рис. 3.9 а. В случае записи обоих уравнений в неподвижной системе координат статора ($\alpha\beta$) моделью ОЭМ будет трансформатор с двумя независимыми обмотками на статоре и двумя обмотками на роторе (рис. 3.9. б), в которых эффект движения ротора будет представлен посредством ЭДС вращения. Уравнения для фазных величин в этом случае мы получим из (3.19) полагая $\omega^{(mn)} = 0$

$$u_{1\alpha} = r_1 i_{1\alpha} + \frac{d\psi_{1\alpha}}{dt}; \quad u_{1\beta} = r_1 i_{1\beta} + \frac{d\psi_{1\beta}}{dt};$$

$$u_{2\alpha} = r_2 i_{2\alpha} + \frac{d\psi_{2\alpha}}{dt} + \omega \psi_{2\beta}; \quad u_{2\beta} = r_2 i_{2\beta} + \frac{d\psi_{2\beta}}{dt} - \omega \psi_{2\alpha}$$

При выводе уравнений (3.18) использовался ряд допущений, поэтому все они должны быть распространены и на модель обобщённой машины, т.е.:

1. машина симметрична и имеет равномерный воздушный зазор;
2. магнитопровод машины ненасыщен;
3. МДС обмоток имеет синусоидальное распределение по рабочему зазору.

Модель ОЭМ универсальна и при принятии определенных условий, из нее можно получить все типы электрических машин как частные случаи. Например, при питании обмоток статора от двух источников переменного синусоидального тока, смещенных по фазе на 90° , в рабочем зазоре создается круговое вращающееся магнитное поле. Если одну из обмоток ротора подключить к источнику постоянного тока, то мы получим модель синхронной машины. Если обе обмотки ротора замкнуть накоротко, то образуется модель асинхронной короткозамкнутой машины. Наконец, если одну из обмоток статора подключить к источнику постоянного тока, а обмотки ротора подключить к двум источникам переменного синусоидального тока с частотой, равной частоте вращения ротора, и фазовым смещением в 90° , таким образом, чтобы поле ротора вращалось в направлении противоположном направлению вращения его вала, то мы получим модель машины постоянного тока. В этой модели поле ротора формируется источниками питания переменного тока с управляемой частотой, роль которых в реальной машине играет источник постоянного тока и коллектор, выполняющий функцию механического инвертора.

Таблица 3.1

Коэффициенты C уравнения электромагнитного момента

		b				
		ψ_1	i_1	ψ_2	i_2	ψ_m
a	ψ_1	0	1	$-\frac{k_1 k_2}{\sigma L_m}$	$-k_1$	~
	i_1	-1	0	$-k_2$	$-L_m$	-1
	ψ_2	$\frac{k_1 k_2}{\sigma L_m}$	k_2	0	-1	~
	i_2	k_1	L_m	1	0	1
	ψ_m	~	1	~	-1	0

Основной величиной характеризующей электромеханический преобразователь является электромагнитный момент на валу. Он образуется в

результате взаимодействия магнитного поля и тока, протекающего в обмотках статора или ротора, и может быть представлен в виде векторного произведения

$$\mathbf{m} = \frac{3}{2} z_p C (\mathbf{a} \times \mathbf{b}),^*$$

где – z_p число пар полюсов машины, а C – коэффициент, зависящий от выбора векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (см. таблицу 1.1^{**}).

В выражениях для момента физический смысл имеет только модуль вектора $\mathbf{m}$ и его можно определить через проекции векторов сомножителей как

$$|\mathbf{m}| = \frac{3}{2} z_p C \cdot \text{Im} \left(\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{b} \right) = \frac{3}{2} z_p C (a_m b_n - a_n b_m).$$

Таким образом, в зависимости от условий задачи для анализа процессов в электрических машинах можно использовать различные пары пространственных векторов и различные системы координат.

Например, в произвольной неориентированной системе координат электромагнитный момент определяется через потокосцепление ротора и ток статора в виде

$$m = \frac{3}{2} z_p k_2 (\psi_{2m} + j\psi_{2n}) \times (i_{1m} + ji_{1n}) = \frac{3}{2} z_p k_2 (\psi_{2m} i_{1n} - \psi_{2n} i_{1m}).$$

Если же систему координат ориентировать по проекции потокосцепления ротора ψ_{2m} , то выражение для вращающего момента существенно упрощается

$$m = \frac{3}{2} z_p k_2 \psi_{2m} i_{1n},$$

т.к. вторая проекция потокосцепления ψ_{2n} обращается в нуль.

3.3. Модель импульсного источника питания

3.3.1. Трёхфазный инвертор

* Множитель 3 в уравнении момента в общем случае равен числу фаз статора m_1 , а делитель $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ соответствует преобразованию модулей векторов сомножителей в действующие значения.

** В таблице 3.1: $k_1 = L_m / L_1$; $k_2 = L_m / L_2$; $\sigma = 1 - k_1 k_2$ – соответственно, коэффициенты электромагнитной связи статора и ротора и коэффициент рассеяния; $\sim$ – означает, что электромагнитный момент не может быть выражен через соответствующее произведение.

Управление электрическими машинами переменного тока осуществляется изменением частоты, амплитуды и фазы напряжения или тока источника питания. Очевидно, что изменение этих параметров в многофазной системе представляет собой сложную техническую задачу. Ранее такие задачи решались в основном с помощью электромашинных каскадов, но в современной технике многофазные источники питания строятся на основе импульсных полупроводниковых устройств, преобразующих напряжение постоянного тока в многофазную систему напряжений переменного тока. Такие устройства называются *инверторами напряжения* (ИН).

Трёхфазный инвертор напряжения представляет собой шесть полностью управляемых электронных ключей ($S_1 \dots S_6$ рис. 3.10 а), соединённых в три пары: $S_1 S_2$, $S_3 S_4$ и $S_5 S_6$, называемые полумостами. Общее количество возможных состояний ключей равно $2^6 = 64$. Однако ключи полумостов не могут одновременно находиться в одинаковом состоянии, т.к. при этом будет возникать либо короткое замыкание источника питания, либо обрыв фаз двигателя. Поэтому их коммутация должна производиться в противофазе и

состояние каждого полумоста можно описать логической функцией или двоичным числом. Тогда количество возможных состояний инвертора уменьшится до восьми ($2^3 = 8$). Условимся в дальнейшем замкнутое состояние нечётных ключей считать единичным, а состояние инвертора описывать трёхразрядным двоичным кодом, где старший, средний и младший разряд соответствуют состоянию полумостов фаз а,

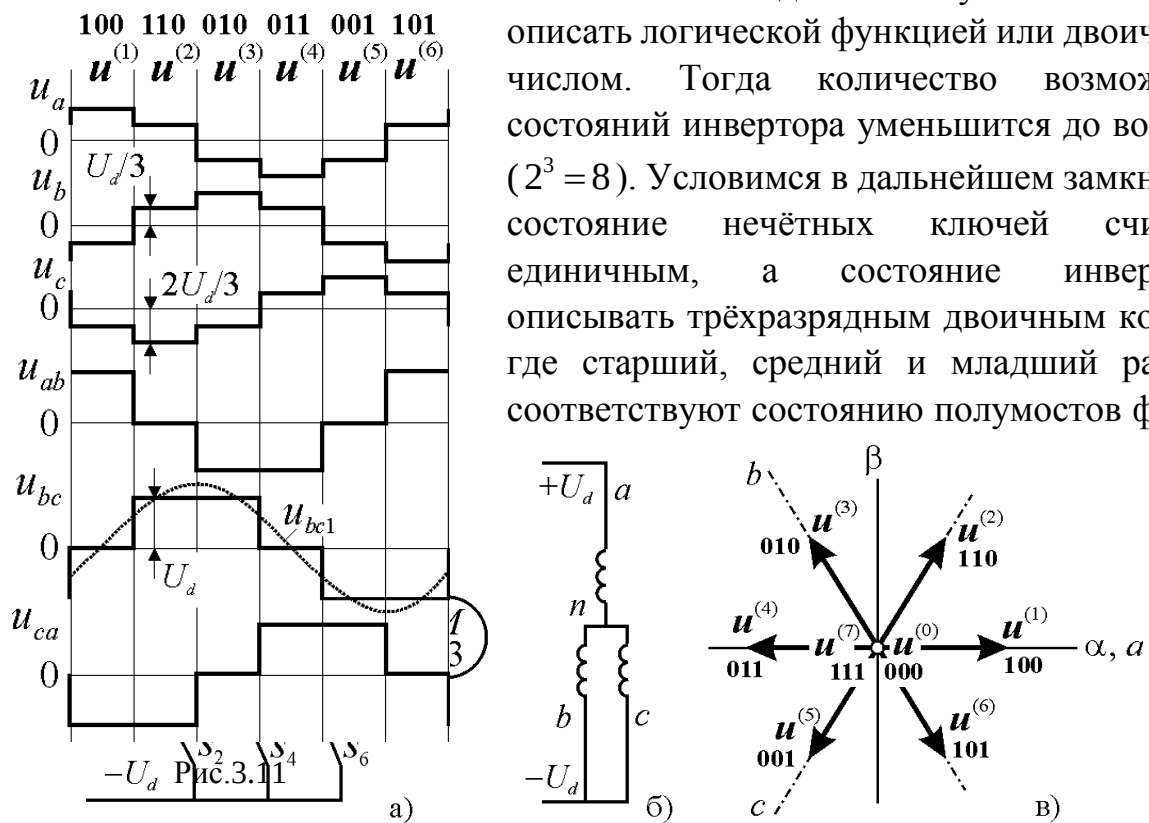


Рис. 3.10

b и c . Например, код $[110]$ будет означать замкнутое состояние ключей 1, 3 и 6 на схеме рис. 3.10 а).

Для исключения токов нулевой последовательности питание АД обычно осуществляется по схеме без нулевого провода. Это приводит к тому, что

коммутация любого из ключей вызывает изменение напряжения на всех обмотках. Учесть эту связь можно, если представить выходное напряжение инвертора пространственным вектором в неподвижной системе координат фазных обмоток статора АД.

Состояния [000] и [111] соответствуют короткому замыканию обмоток статора верхними (нечётными) или нижними (чётными) ключами. При этом все фазные напряжения будут равны нулю. Нулевыми будут и векторы, представляющие эти состояния – $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{u}^{(7)} = \mathbf{0}$.

Любое другое состояние ключей создаёт последовательно-параллельное соединение обмоток статора двигателя и в статическом режиме распределяет падение напряжения на них в соотношении $1/2$. Например, для приведённого на рис. 3.10 б) состояния [100] фазное напряжение $u_a = u_{an} = 2U_d/3$, а напряжения $u_b = u_{bn} = u_c = u_{cn} = U_d/3$. Представим это состояние вектором $\mathbf{u}^{(1)}$, проекции которого на фазные оси будут равны соответствующим напряжениям

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^{(1)} &= \frac{2}{3}(u_a + \mathbf{a}u_b + \mathbf{a}^2u_c) = U_v e^{j\delta} \\ &\Downarrow \\ |\mathbf{u}^{(1)}| &= U_v = \frac{2}{3} \left[\frac{2}{3}U_d - \frac{1}{3}U_d \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{3}U_d \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right] = \frac{2}{3}U_d \\ &\delta = 0\end{aligned}$$

Проделав аналогичные вычисления для остальных пяти состояний 2...6, мы получим общее выражение для всех ненулевых векторов

$$\mathbf{u}^{(k)} = U_v e^{j\pi(k-1)/3} = \frac{2}{3}U_d e^{j\pi(k-1)/3} \quad (3.20)$$

Векторы $\mathbf{u}^{(0)} \dots \mathbf{u}^{(7)}$ называются *базовыми*, а ненулевые базовые векторы $\mathbf{u}^{(1)} \dots \mathbf{u}^{(6)}$ – активными векторами (рис. 3.10.в).

Если алгоритм работы инвертора построить так, чтобы он с постоянной тактовой частотой последовательно формировал активные базовые векторы, то фазные и линейные напряжения на выходе будут иметь вид, представленный на рис. 3.11. Первая гармоника линейного напряжения при этом будет равна $U_{\text{л1м}} = 2U_d \sqrt{3}/\pi = 1,103U_d$, а фазного напряжения – $U_{\text{ф1м}} = U_{\text{л1м}}/\sqrt{3} = 0,637U_d$. Несинусоидальность напряжения приводит к несинусоидальности токов и вызывает пульсации электромагнитного момента двигателя, что проявляется в колебаниях скорости вращения, особенно

заметных при низких частотах. Это ограничивает диапазон регулирования и значительно увеличивает потери энергии по сравнению с питанием от источника синусоидального напряжения. Поэтому такой алгоритм работы инвертора в прецизионных приводах практически не применяется.

3.3.2. Преобразователи частоты без обратной связи

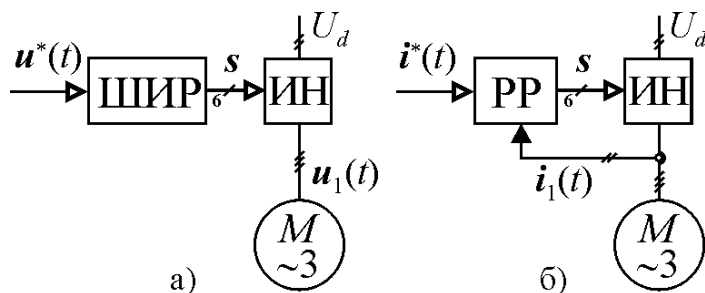


Рис. 3.12

Инвертор напряжения в совокупности с системой управления, теми или иными датчиками переменных, а также управляемым или неуправляемым выпрямителем называется преобразователем частоты (ПЧ). В зависимости от

наличия или отсутствия обратной связи по току они могут формировать на выходе многофазную систему напряжений или токов.

Преобразователи частоты без обратной связи воспроизводят на выходе напряжение $u_1(t)$, среднее значение основной гармоники которого соответствует сигналу задания $u^*(t)$ (рис. 3.12). Для формирования сигналов управления ключами инвертора напряжения s в таких преобразователях используют широтно-импульсный регулятор (ШИР).

3.3.2.1. Широтно-импульсная модуляция

Широтно-импульсная модуляции (ШИМ) широко используется в различных областях техники для импульсного регулирования напряжения или тока в нагрузке. До недавнего времени в ПЧ использовались в основном аналоговые и цифровые широтно-импульсные модуляторы «вертикального» типа, построенные на принципе линейной развёртки (рис. 3.13, б).

Этот метод основан на сравнении сигналов задания для каждого фазного напряжения (u_a^* , u_b^* , u_c^*) с общим для всех фаз сигналом линейной развёртки u_s (рис. 3.13). Фазные сигналы вычисляются из вектора задания u^* разделением на фазные проекции. Коммутационные логические функции полумостов инвертора s_a , s_b и s_c , реализуемые соответствующими компараторами, имеют вид

$$s_q = \begin{cases} 1 \rightarrow u_q > u_s \\ 0 \rightarrow u_q < u_s \end{cases}; q = [a, b, c].$$

На рис. 3.13 в процесс широтно-импульсной модуляции показан в деталях. В результате ШИМ средние значения фазных напряжений на выходе инвертора в пределах каждого периода модуляции T_s будут равны средним значениям соответствующих сигналов задания.

В случае если амплитуда сигналов задания u_a^*, u_b^*, u_c^* не превышает амплитуду сигнала развёртки $u_{l_{\max}} = U_d/2$, ПЧ обладает единичной передаточной функцией по основной гармонике. Следовательно, амплитуда первой гармоники фазного напряжения на выходе инвертора не превышает $U_d/2$, а амплитуда линейного напряжения – $\sqrt{3}U_d/2 \approx 0,866 \cdot U_d$. Это меньше, чем в случае использования трёх мостовых инверторов для каждой фазы АД, где амплитуда линейного напряжения может достигать полного напряжения звена постоянного тока U_d .

Для улучшения использования ПЧ в сигнал задания в дополнение к основной можно ввести гармоники нулевой последовательности с таким расчётом, чтобы максимальное значение сигнала было равно $U_d/2$. Выполнение этого условия приведёт к увеличению амплитуды первой

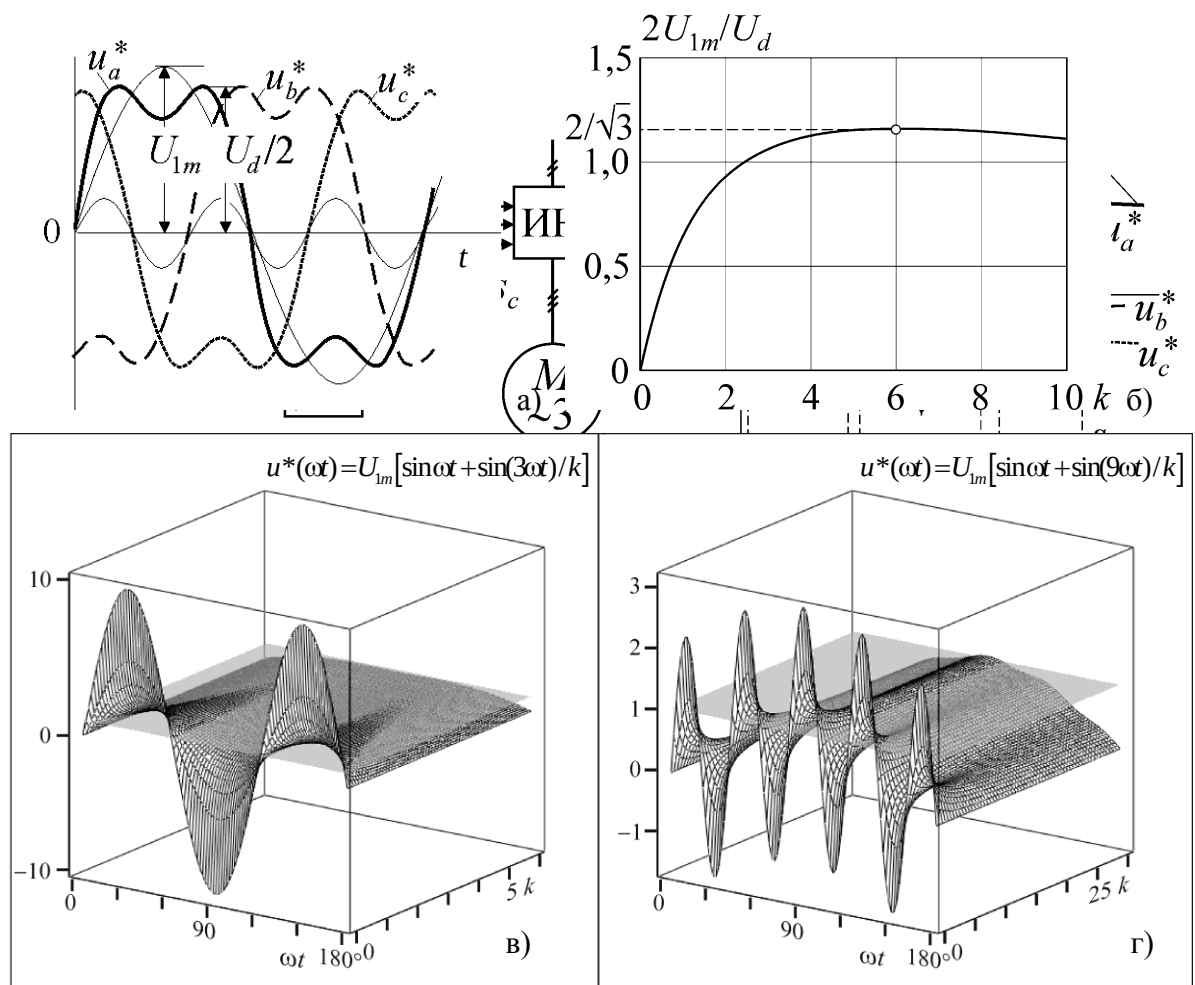


Рис. 3.14

гармоники в спектре U_{am} (рис. 3.14, а). При этом высшие гармоники нулевой последовательности никоим образом не повлияют на годограф вектора напряжения статора, т.к. они исключаются при векторных преобразованиях*.

*см. раздел 3.1

При отсутствии нулевого провода эти гармоники не вызовут и искажения фазных токов. В качестве примера на рис. 3.14, а показаны сигналы задания с введением в них третьей гармоники с амплитудой, равной $1/4$ амплитуды основной гармоники.

Введение в сигнал задания гармоник нулевой последовательности называется предмодуляцией. Теоретически в трёхфазном инверторе кроме третьей такими гармониками могут быть 9-я, 15-я и т.д. Однако при включении в сигнал любой n -й гармоники кроме третьей в области фаз близких к $\pi/2$ при всех кратностях амплитуд $k = U_{1m}/U_{nm}$ существуют максимумы, не позволяющие увеличить амплитуду первой гармоники U_{1m} (см. рис. 3.14, з). Таким образом, при ШИМ с предмодуляцией можно использовать только сигнал вида

$$u^*(\omega t) = U_{1m} [\sin \omega t + \sin(3\omega t)/k], \quad (3.21)$$

где $0 < k = U_{1m}/U_{3m} < \infty$.

При этом функция (3.21) в области $0 \leq \omega t \leq \pi$ имеет минимум $u^*_{\min}$ при $\omega t = \pi/2$ и два максимума $u^*_{\max 1} = u^*_{\max 2}$ при

$$\omega t_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{27-3k}}{6}\right) \text{ и } \omega t_2 = \pi - \arccos\left(\frac{\sqrt{27-3k}}{6}\right)$$

(см. рис. 3.14, в).

Подставляя в (3.21) угол первого максимума, получим условие формирования сигнала предмодуляции с максимальной амплитудой основной гармоники

$$\begin{aligned} \frac{2 \cdot u^*_{\max 1}}{U_d} &= 1 \\ \Downarrow \\ \frac{2U_{1m}}{U_d} \left\{ \sin \left[\arccos \left(\frac{\sqrt{27-3k}}{6} \right) \right] + \frac{1}{k} \sin \left[3 \cdot \arccos \left(\frac{\sqrt{27-3k}}{6} \right) \right] \right\} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

Решая уравнение (3.22), получим

$$\frac{2U_{1m}}{U_d} = f(k) = \frac{3k}{(1+k/3)\sqrt{9+3k}}. \quad (3.23)$$

Эта функция имеет максимум при $k = 6$ (рис. 3.14, б)

$$f(6) = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow U_{1m} = \frac{U_d}{\sqrt{3}}. \quad (3.24)$$

Таким образом, введение в сигнал задания третьей гармоники с амплитудой, равной 1/6 амплитуды основной гармоники, позволяет увеличить амплитуду первой гармоники выходного напряжения на 15,47%.

Ещё больший эффект даёт включение прямоугольных сигналов тройной частоты, которое поднимает амплитуду первой гармоники до напряжения звена постоянного тока U_d . Однако при этом в спектре выходного напряжения появляются также гармоники прямой и обратной последовательности, ухудшающие работу привода.

Метод ШИМ очень удобен при аппаратной реализации с помощью аналоговых интеграторов и компараторов. С их помощью легко можно

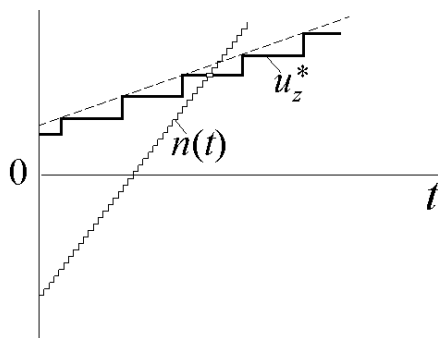


Рис. 3.15

получить частоту коммутации в несколько десятков килогерц. При цифровой реализации вместо интегратора, на котором строится генератор развёртки, используются импульсный генератор и счётчик, код которого $n(t)$ с помощью сумматора сравнивается с цифровым сигналом задания u_z^* (рис. 3.15).

Чтобы не загружать процессор системы управления вычислениями, связанными с формированием сигналов модуляции, эту функцию в ПЧ выполняет специальная микросхема, называемая ШИМ-контроллер. Все крупные современные производители электронных компонентов выпускают изделия этого типа. Они отличаются большим разнообразием характеристик и функциональных возможностей, но реализуют одинаковые принципы широтно-импульсной модуляции.

3.3.2.2. Пространственно-векторная модуляция

Метод модуляции базовых векторов, называемый пространственно-векторной модуляцией (ПВМ)* с середины 90-х годов сформировался как самостоятельный метод альтернативный ШИМ и стал использоваться в преобразователях частоты независимо от реализуемого с его помощью принципа управления приводом.

В основе метода ПВМ лежит представление любой точки на плоскости базовых векторов вектором $\hat{u}$, равным среднему значению суммы нескольких векторов $\mathbf{u}^{(q)}$, формируемых в пределах периода модуляции T_s в течение времени t_q :

$$\hat{u} = \frac{1}{T_m} \sum \mathbf{u}^{(q)} t_q.$$

Очевидно, что такая задача имеет бесконечное множество решений, поэтому её ограничивают, включая в сумму только соседние векторы,

* в англоязычной литературе — *space vector modulation (SVM)*

образующие сектор, в котором находится вектор $\hat{\mathbf{u}}$, а также один или оба нулевых вектора. Тогда вектор $\hat{\mathbf{u}}$, находящийся в k -м секторе, будет определяться как

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}} &= U_v \nu e^{j\phi} = \frac{1}{T_m} \left(\mathbf{u}^{(k)} t_k + \mathbf{u}^{(k+1)} t_{k+1} + \mathbf{u}^{(0)} t_0 \right) = \\ &= \mathbf{u}^{(k)} \tau_k + \mathbf{u}^{(k+1)} \tau_{k+1} = U_v \left(\mathbf{1}^{(k)} \tau_k + \mathbf{1}^{(k+1)} \tau_{k+1} \right)\end{aligned}\quad (3.25)$$

где: $\nu = |\hat{\mathbf{u}}| / U_v$ – нормированный модуль вектора $\hat{\mathbf{u}}$, отнесённый к модулю активных базовых векторов $U_v = 2U_d / 3$; $\mathbf{1}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k)} / U_v = e^{j\pi(k-1)/3}$ – единичный базовый вектор; ϕ – угол между векторами $\hat{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{u}^{(k)} = U_v e^{j[\pi(k-1)/3]}$; $\tau_k = t_k / T_s$; $\tau_{k+1} = t_{k+1} / T_s$; $\tau_0 = t_0 / T_s$ – относительные длительности формирования соответствующих векторов, причём $\tau_k + \tau_{k+1} + \tau_0 = T_s$.

Из уравнения (3.25) следует

$$\nu e^{j\phi} = e^{j\pi(k-1)/3} \left(\tau_k + e^{j\pi/3} \tau_{k+1} \right) \quad (3.26)$$

и тогда, полагая $k=1$ и разделяя вещественную и мнимую часть, получим для первого сектора

$$\tau_1 = \nu \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \left(\frac{\pi}{3} - \phi \right); \quad \tau_2 = \nu \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \phi; \quad \tau_0 = 1 - \tau_1 - \tau_2. \quad (3.27)$$

Определим максимально возможное значение модуля вектора $\hat{\mathbf{u}}$. Это равносильно отсутствию нулевого вектора, т.е. условию $\tau_0 = 0 \rightarrow \tau_1 + \tau_2 = 1$. Из (3.27) следует

$$\nu_{\max} \frac{2}{\sqrt{3}} \cos \left(\frac{\pi}{6} - \phi \right) = 1 \Rightarrow \nu_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \cos \phi + \sin \phi}. \quad (3.28)$$

На границах сектора $\phi = 0 \rightarrow \nu_{\max} = 1$; $\phi = \pi/3 \rightarrow \nu_{\max} = 1$. Тогда с учётом, что $\nu_{\max \alpha} = \nu_{\max} \cos \phi$; $\nu_{\max \beta} = \nu_{\max} \sin \phi$, получим

$$\nu_{\max \beta} = \sqrt{3}(1 - \nu_{\max \alpha}). \quad (3.29)$$

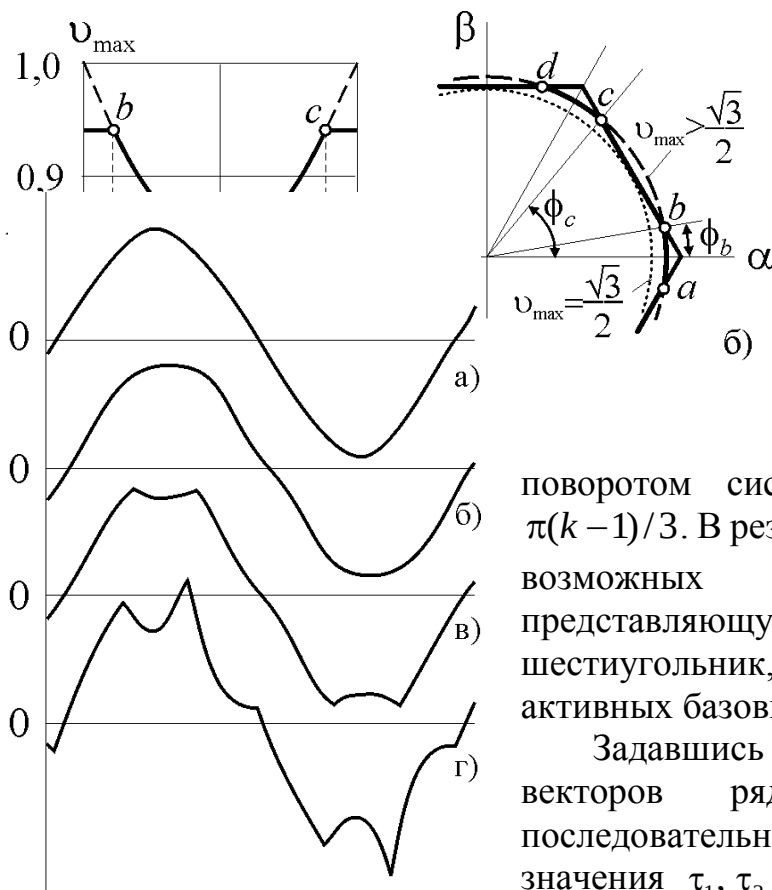


Рис. 3.17

Это уравнение прямой линии, проходящей через концы единичных базовых векторов ограничивающих первый сектор. Оно получено из (3.26) исключением оператора поворота $e^{j\pi(k-1)/3}$. Поэтому решение можно распространить на другие секторы плоскости поворотом системы координат на угол $\pi(k-1)/3$. В результате мы получим границу возможных значений вектора $\hat{u}$, представляющую собой правильный шестиугольник, соединяющий вершины активных базовых векторов (рис. 3.16 б).
Задавшись на плоскости базовых векторов рядом точек, а затем, последовательно рассчитывая для них значения τ_1 , τ_2 и τ_0 , и формируя базовые векторы, можно в пределах граничного шестиугольника реализовать любой годограф вектора напряжения $\hat{u}(t)$. В частности он может быть круговым, однако, учитывая, что функция (3.28) $v_m(\phi)$ имеет минимум при $\phi = \pi/6$ равный $\sqrt{3}/2$ (рис. 3.16 а), модуль вектора напряжения с круговым годографом не может превышать значения $\sqrt{3}U_v/2 = U_d/\sqrt{3}$. Это соответствует максимальной амплитуде синусоидального фазного напряжения. Тогда максимально возможная амплитуда линейного напряжения будет равна U_d , что почти на 15% больше максимальной амплитуды первой гармоники при синусоидальной ШИМ без предмодуляции, составляющей $\sqrt{3} \cdot U_d/2$. Это свойство является одной из причин широкого применения ПВМ на практике, т.к. позволяет понизить напряжение в звене постоянного тока, снизив тем самым нагрузку на ключи инвертора и требования к конденсаторам фильтра.

Окружность, вписанная в граничный шестиугольник, определяет область линейного преобразования. Однако, кроме этого возможно формирование годографов, выходящих за пределы линейной области. Назовём такую модуляцию нелинейной ПВМ (НПВМ). На рис. 3.16 б) штриховой линией показана траектория вектора, пересекающая шестиугольник в точках $abcd$. Вне шестиугольника траектория вектора в принципе не может быть сформирована. Поэтому между точками ab и cd он может быть круговым, а на

участке bc – линейным. По мере увеличения v_m величина дуг ab и cd будет сокращаться, и траектория движения превратится в шестиугольник с некоторой конечной скоростью движения вектора по его сторонам. Эту скорость можно регулировать соотношением длительностей τ_1 и τ_2 , и, в конечном счёте, ПВМ преобразуется в шестипульсную коммутацию со скачкообразным переходом от одного базового вектора к другому. На рис. 3.17 показан результат постепенного перехода от линейной модуляции a к шестипульсной коммутации z .

В отличие от ШИМ при векторной модуляции нет отдельных сигналов задания для каждой фазы выходного напряжения инвертора. Сигналом задания равно как аргументом и выходной величиной всех функций является вектор.

Существенное значение при векторной модуляции имеет не только длительность интервалов τ_1, τ_2 и τ_0 , но также последовательность формирования активных и нулевых векторов.

Все возможные алгоритмы коммутации полумостов инвертора можно разделить на несимметричные и симметричные. Несимметричные – это алгоритмы с различным состоянием коммутационных функций в начале и в конце периода модуляции T_s . На рис. 3.18 они соответствуют алгоритмам I и II. Несимметричные алгоритмы можно реализовать в двух вариантах с противоположным порядком следования состояний инвертора (I a и I b на рис. 3.18). Очевидно, что по своим характеристикам эти алгоритмы будут идентичными.

Алгоритм II отличается от I-го алгоритма тем, что в нём используется только один нулевой вектор. Поэтому одна из коммутационных функций (S_c) сохраняет постоянное значение. В результате в пределах каждого сектора коммутируют только два полумоста и количество переключений за период модуляции уменьшается с шести до четырёх. Пропорционально уменьшаются и коммутационные потери в ключах.

Симметричные алгоритмы III и IV отличаются друг от друга только использованием нулевых векторов. На рис. 3.18 приведены графы соответствующих алгоритмов для первого сектора. Стрелками на них

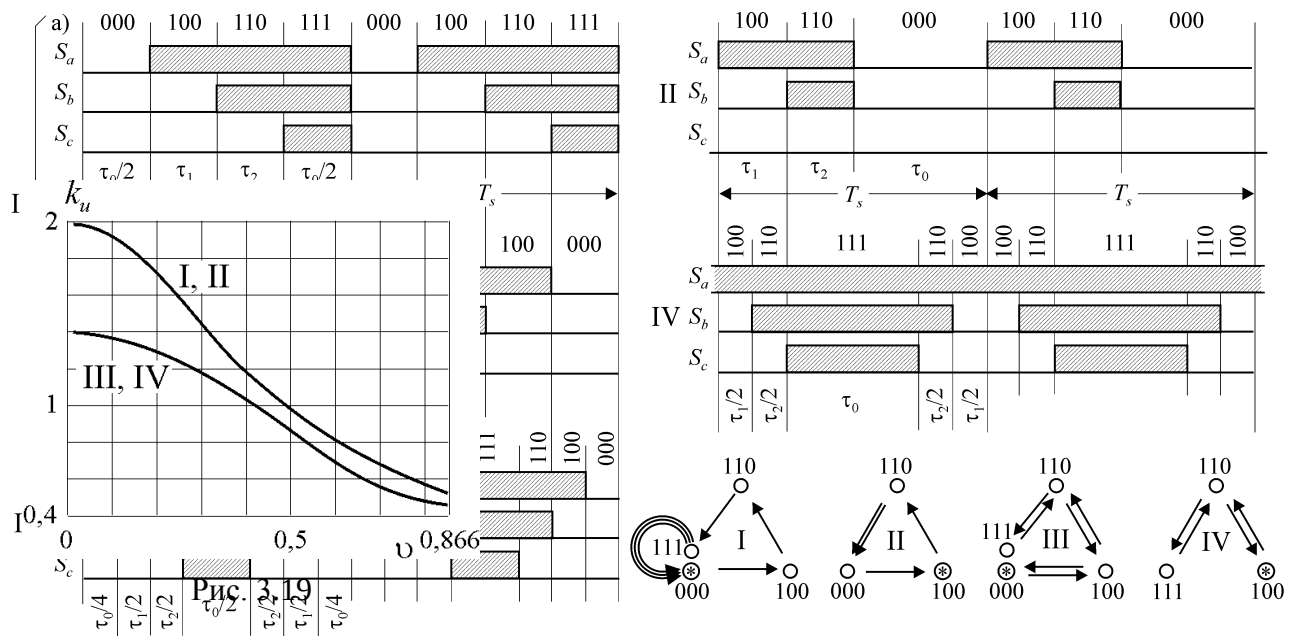


Рис. 3.18

обозначены отдельные коммутации, а звёздочкой – начальное состояние коммутационных функций. Из рисунка следует, что в симметричных алгоритмах, также как в несимметричных, исключение одного из нулевых векторов уменьшает до минимума число коммутаций. Однако при этом появляется одна дополнительная коммутация при переходе вектора в соседний сектор, т.к. нулевые векторы чередуются в чётных и нечётных секторах.

Ещё одним важным параметром, по которому можно оценить алгоритмы коммутации является коэффициент искажений*

$$k_u = \frac{\sqrt{\sum_{q=2}^{\infty} U_q^2}}{U_1}.$$

Из рис. 3.19 следует, что по этому показателю симметричные алгоритмы существенно отличаются от несимметричных. Следует заметить, что во всех алгоритмах при уменьшении амплитуды основной гармоники увеличивается коэффициент искажений. Это объясняется тем, что высшие гармоники мало изменяются при изменении модуля вектора $\hat{u}$.

Оптимальным гармоническим составом и минимумом коммутационных потерь обладает алгоритм IV-го типа, поэтому именно этот алгоритм реализуется в серийных контроллерах для ПВМ.

* в англоязычной литературе – THD (total harmonic distortion)

На рисунке 3.20 показан алгоритм работы инвертора при $v = v_{\max} = \sqrt{3}/2$ с периодом модуляции $T_s = T_1/36 = 2\pi/(36 \cdot \omega_1)$. В этом случае q -му периоду T_s будет соответствовать угол $\phi_q = (q-1)\pi/18$. Тогда в соответствии с (3.27) относительные значения интервалов для 2...4 периодов будут равны $\tau_1 = [0,76; 0,64; 0,5]$, $\tau_2 = [0,17; 0,34; 0,5]$ и $\tau_0 = [0,06; 0,02; 0]$. В реальных контроллерах эти значения рассчитываются с помощью синусных таблиц после захвата значения вектора $\hat{u}$ в начале периода модуляции, либо с задержкой на один период.

С учётом того, что для IV-го алгоритма коммутационная функция S_a в первом секторе равна единице, для определения двух других функций через сигнал развёртки u_i достаточно использовать только τ_1 и τ_0 :

$$S_a = 1; S_b = \begin{cases} 1 \rightarrow u_s > \tau_1 \\ 0 \rightarrow u_s < \tau_1 \end{cases}; S_c = \begin{cases} 1 \rightarrow u_s > 1 - \tau_0 \\ 0 \rightarrow u_s < 1 - \tau_0 \end{cases}$$

Очевидно, что здесь, также как при ШИМ, ПВМ-контроллер можно реализовать аппаратно в аналоговой или цифровой форме или, если позволяют ресурсы процессора системы управления приводом, реализовать его программно.

Современные инверторы работают при частотах коммутации 18...20 кГц, что позволяет формировать методом ПВМ в обмотках статора АД напряжения

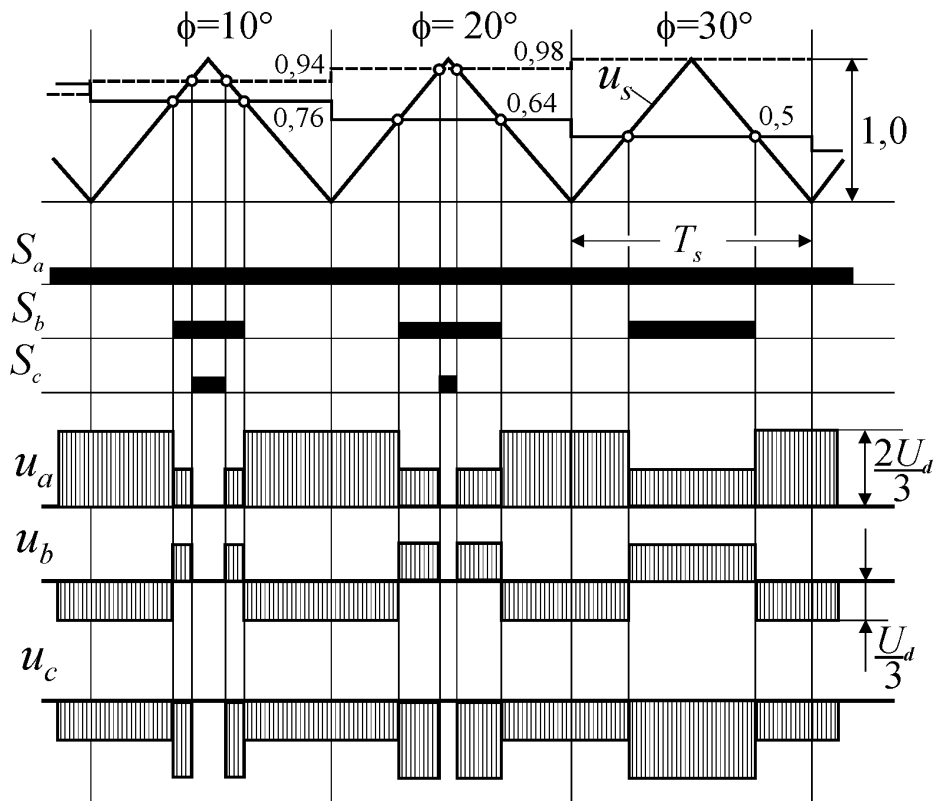


Рис. 3.20

с практически синусоидально изменяющимся средним значением

3.3.2.3. Трёхуровневый инвертор

В последнее время для управления приводами с машинами переменного тока стали использовать инверторы с двойным количеством ключей и, соответственно, более сложным алгоритмом управления. Это позволяет увеличить число формируемых базовых векторов и улучшить тем самым гармонический состав напряжения. Кроме того, в таких инверторах за счёт последовательного соединения снижается напряжение на отдельных ключевых элементах.

Как следует из рис. 3.21, одновременное открытие пары ключей с чётными или нечётными первыми индексами эквивалентно коммутации чётных и нечётных ключей обычного инвертора, т.е. при этом обмотка статора подключается соответственно к отрицательной или положительной шине источника питания. Одновременное открытие пары ключей соединённых со средней точкой полумоста приводит к образованию соединения нагрузки через ключи и дополнительные диоды с нейтральной точкой источника N .

Таким образом, линейное напряжение нагрузки может принимать три значения: $\pm U_d$; $\pm U_d / 2$; 0. Количество возможных базовых векторов при этом будет равно $3^3 = 27$. Однако с учётом того, что некоторые базовые векторы могут быть сформированы несколькими возможными комбинациями

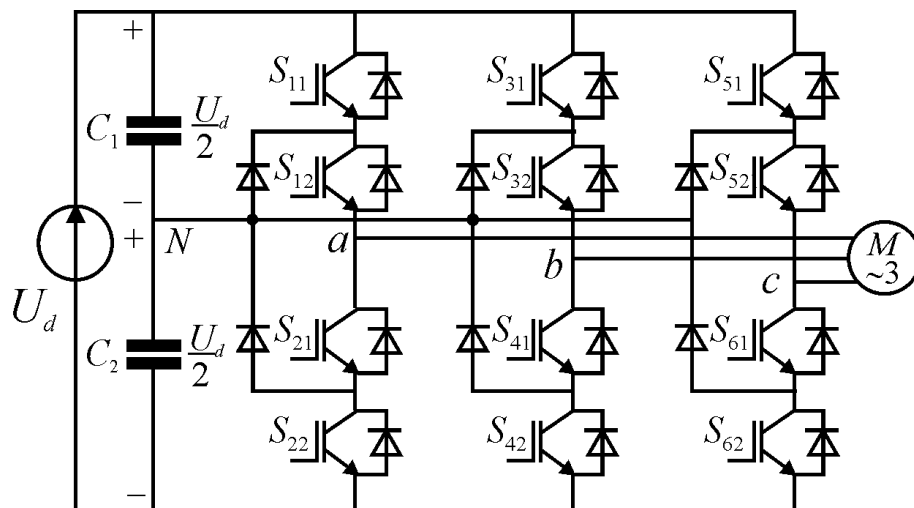


Рис. 3.21

состояний ключей, общее количество базовых векторов формируемых трёхуровневым инвертором (ТИН) равно 19.

На рис. 3.22 показаны точки базовых векторов и комбинации состояний при их формировании. Символами «+» и «-» обозначены подключения к соответствующим шинам питания, а символом «0» – подключение к нейтральной точке.

Заданный вектор напряжения $\hat{u}^*$ формируется из трёх ближайших базовых векторов, образующих треугольный сегмент плоскости. Длительности формирования базовых векторов τ_1, τ_2 и τ_3 можно определить из уравнений:

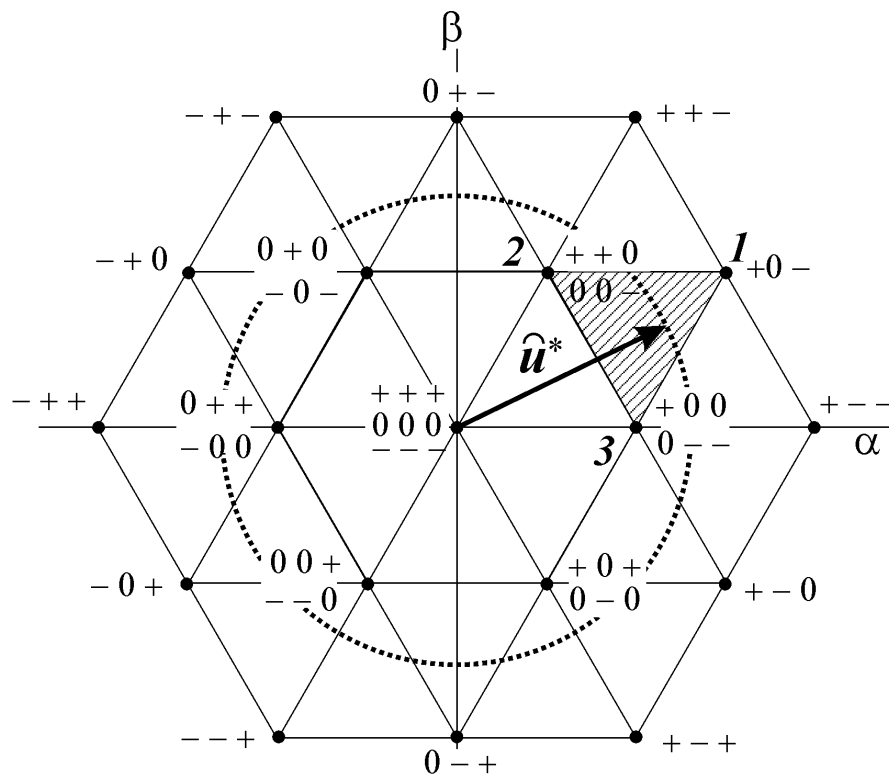


Рис. 3.22

$$\begin{bmatrix} \hat{u}_\alpha^* \\ \hat{u}_\beta^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{1\alpha} & u_{2\alpha} & u_{3\alpha} \\ u_{1\beta} & u_{2\beta} & u_{3\beta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix},$$

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 1$$

где индексами α и β обозначены соответствующие координаты векторов, а цифровыми индексами – координаты базовых векторов сегмента 123. Объединяя эти уравнения, получим

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{u}_\alpha^* \\ \hat{u}_\beta^* \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{1\alpha} & u_{2\alpha} & u_{3\alpha} \\ u_{1\beta} & u_{2\beta} & u_{3\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \\
&\Downarrow \\
\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_{1\alpha} & u_{2\alpha} & u_{3\alpha} \\ u_{1\beta} & u_{2\beta} & u_{3\beta} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} \hat{u}_\alpha^* \\ \hat{u}_\beta^* \\ 1 \end{bmatrix} = D \begin{bmatrix} u_{2\beta} - u_{3\beta} & u_{3\alpha} - u_{2\alpha} & u_{2\alpha}u_{3\beta} - u_{3\alpha}u_{2\beta} \\ u_{3\beta} - u_{1\beta} & u_{1\alpha} - u_{3\alpha} & u_{1\beta}u_{3\alpha} - u_{1\alpha}u_{3\beta} \\ u_{1\beta} - u_{2\beta} & u_{2\alpha} - u_{1\alpha} & u_{1\alpha}u_{2\beta} - u_{1\beta}u_{2\alpha} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \hat{u}_\alpha^* \\ \hat{u}_\beta^* \\ 1 \end{bmatrix}; \\
D &= \frac{1}{u_{1\alpha}u_{2\beta} - u_{1\alpha}u_{3\beta} - u_{1\beta}u_{2\alpha} + u_{1\beta}u_{3\alpha} + u_{2\alpha}u_{3\beta} - u_{3\alpha}u_{2\beta}}.
\end{aligned}$$

Очевидно, что модули базовых векторов, расположенных в вершинах внешнего шестиугольника (рис. 3.22), имеют такую же величину, как и в обычном двухуровневом инверторе, а модули векторов в вершинах внутреннего шестиугольника – вдвое меньше. Соответственно, модули векторов, расположенных на сторонах внешнего шестиугольника, в $\sqrt{3}/2$ раз меньше векторов в его вершинах.

3.3.3. Преобразователи с обратной связью

Обратная связь в преобразователях частоты используется для формирования векторов тока или потокосцепления статора.

На рис. 3.23 а приведена функциональная схема системы формирования тока двигателя. Она содержит три двухпозиционных релейных регулятора с гистерезисом. Каждый регулятор определяет коммутационную функцию соответствующего полумоста инвертора так, что ошибки формирования фазных токов находятся в пределах величины гистерезиса $\pm\Delta_i$. В отечественной литературе этот метод часто называется «токовым коридором»*. Метод очень прост в реализации и обладает высоким быстродействием, однако ему присущи серьёзные недостатки:

- между контроллерами нет взаимосвязи, поэтому невозможно реализовать какой-либо принцип выбора нулевых векторов, что приводит к увеличению частоты коммутации при малых амплитудах тока;
- при малых скоростях вращения в преобразователе могут возникать автоколебания с предельным циклом на высокой частоте за счёт отсутствия в алгоритме нулевых векторов (рис. 3.23 б);
- ошибка формирования тока может выходить за границы гистерезиса и достигать значения $2\Delta_i$, если нулевой вектор будет сформирован в тот момент, когда вектор противоэдс имеет составляющую, направленную встречно по отношению к активному базовому вектору (рис. 3.23 б);

* в англоязычной литературе этот метод называется *hysteresis current control (HCC)*

- нерегулируемая переменная частота коммутации порождает непрерывный спектр гармоник тока с включением в него дискретных субгармонических составляющих, величина которых практически не зависит от амплитуды тока.

Средняя частота коммутации в гистерезисной системе формирования тока представляет собой практически синусоидальную зависимость от нормированного модуля тока

$$\hat{f} = \hat{f}_{\min} + \hat{f}_{\max} \sin(\iota_m \pi) \quad (3.30)$$

где: $\iota_m = |\mathbf{i}_1^*| / i_{1\max}$ – модуль заданного вектора тока, отнесённый к максимальному значению тока статора; $\hat{f}_{\min}, \hat{f}_{\max}$ – минимальное и максимальное среднее значение частоты, зависящее от величины гистерезиса, напряжения в звене постоянного тока, параметров двигателя и режима его работы.

Релейные системы обычно работают при более высоких частотах коммутации, что, ввиду значительных коммутационных потерь, ограничивает их применение приводами малой и средней мощности.

Автоколебания и выход регулируемой величины за пределы границ гистерезиса регуляторов можно исключить дополнительными компараторами и логической обработкой их состояний. За счёт усложнения устройства можно также стабилизировать частоту коммутации, например, управлением величиной гистерезиса в функции обратной (3.30).

Все основные недостатки систем с гистерезисными регуляторами исключаются введением в контур управления ШИМ и ПИ-регулятора,

который формирует сигнал задания u_1^* для ШИМ (рис. 3.24 а).

Для контура регулирования тока противоэдс двигателя является возмущающим воздействием, но она не содержит высших гармоник и поэтому может быть скомпенсирована интегратором регулятора. Однако статическая ошибка формирования тока сохранится. На рис. 3.24 б показано отклонение тока под влиянием противоэдс.

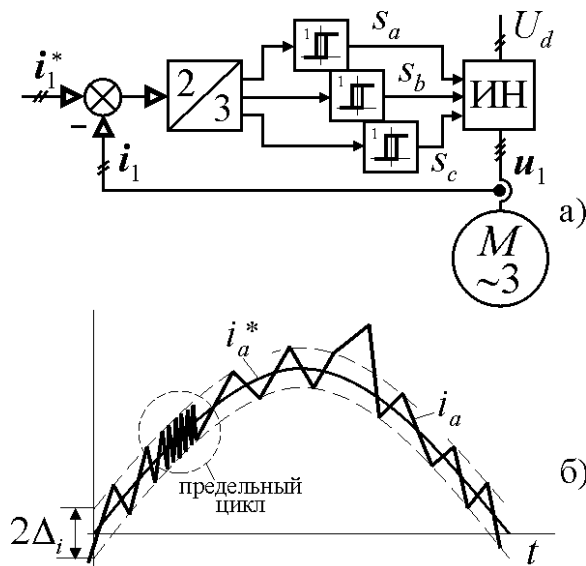


Рис. 3.23

В ограниченных пределах статическую ошибку можно уменьшить, увеличив пропорциональный коэффициент регулятора, но при этом

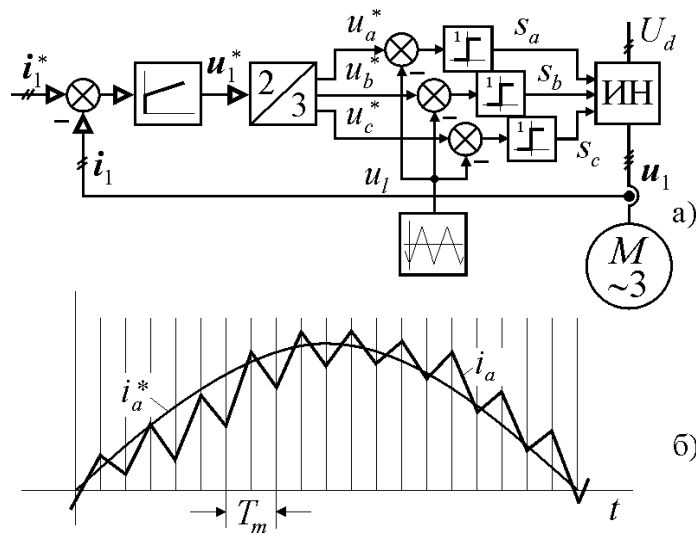


Рис. 3.24

происходит усиление высших гармоник, что может нарушить работу ШИМ, если скорость изменения сигнала ошибки станет больше скорости изменения сигнала развёртки. Кроме того, ШИМ может войти в зону насыщения, если сигнал задания выйдет за пределы сигнала развёртки.

Существенным достоинством системы с ШИМ является то, что её спектр тока практически линейчатый. Он состоит, кроме основной

гармоники, из гармоник кратных частоте модуляции и не содержит субгармонических составляющих. Это позволяет в случае необходимости легко реализовать фильтрацию и решить значительную часть проблем электромагнитной совместимости.

4. Моделирование в автономных инверторах среде *Matlab/Simulink*

Математическое моделирование является одним из основных методов изучения электромагнитных процессов в электроустановках. С помощью модели можно исследовать влияние отдельных параметров и воздействий, что обычно невозможно сделать в реальных объектах. Правильно разработанная модель позволяет существенно сократить время на исследования и их стоимость, а также исключить повреждения и гибель оборудования, связанные с ошибками проектирования.

Для построения модели можно использовать различные математические пакеты, однако пакет *Matlab* с расширением *Simulink* в настоящее время стал *de facto* стандартом в инженерных и научных исследованиях. Это связано с чрезвычайно широкими возможностями, позволяющими моделировать линейные и нелинейные системы и устройства. Пакет *Simulink* является типичным средством визуально-ориентированного программирования. Он автоматизирует наиболее трудоёмкий этап, связанный с составлением систем алгебраических и дифференциальных уравнений. Большой набор библиотек наиболее распространённых элементов технических устройств позволяет легко реализовать достаточно сложные модели, а возможности математических библиотек — дополнить этот набор недостающими элементами.

4.1. Модель трёхфазного инвертора напряжения

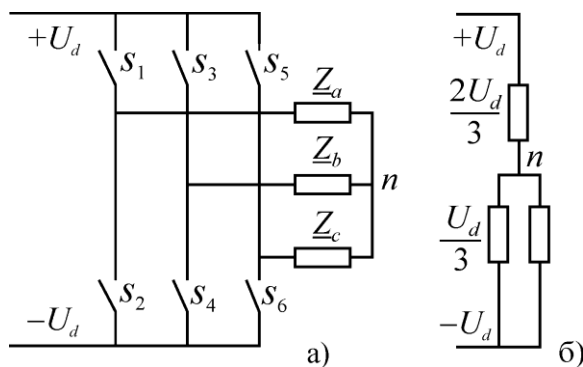


Рис. 4.1

4.1.1. Модель силовой части инвертора

Современные устройства электропитания строятся на основе инвертора напряжения (ИН)*, представляющего собой три пары полупроводниковых ключей (рис. 4.1, а), управляемых по тому или иному закону**. Ключами ИН могут быть различные типы тириستоров или транзисторов.

Большинство современных инверторов строится на основе биполярных транзисторов с изолированным затвором***.

* voltage-source inverter (VSI) – в англоязычной литературе

** см. раздел 3.3

*** isolated gate bipolar transistor (IGBT) – в англоязычной литературе

Для моделей инвертора и нагрузки в различных задачах можно использовать различные библиотеки среды *Simulink*, что позволяет оптимизировать процесс моделирования.

4.1.1.1. Модель на основе элементов библиотеки *SimPowerSystems*

Значительная часть задач исследования работы инвертора не требует моделирования процессов в силовых ключах и может быть решена с использованием идеальных ключей (*Ideal Switch*) библиотеки «*SimPowerSystems/Power Electronics*». На рис. 4.2 показан вид блока идеальный ключ (ИК) и панель интерфейса задания его параметров.

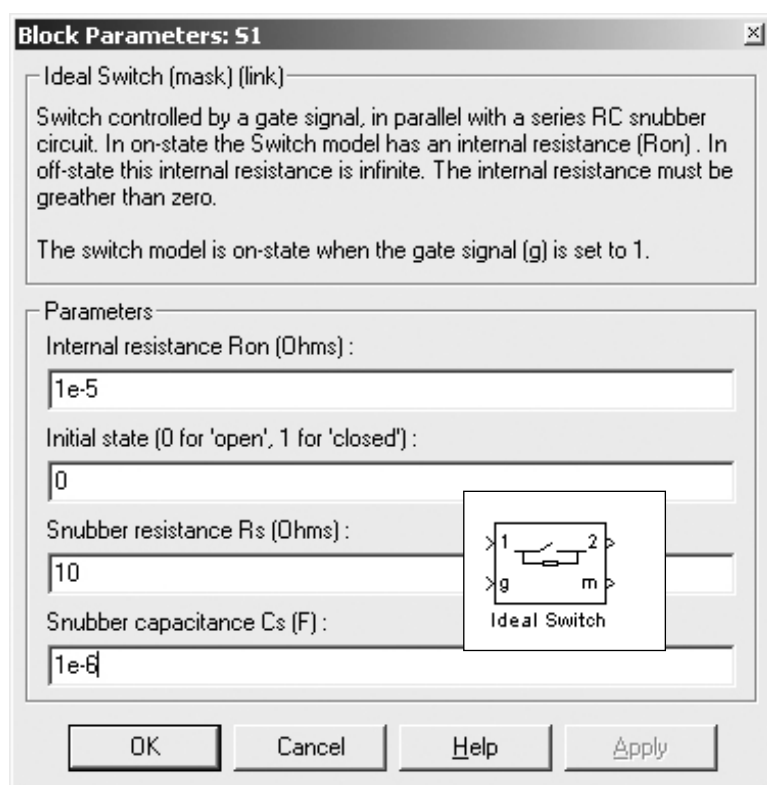


Рис. 4.2.

Идеальный ключ обладает бесконечно большим сопротивлением в закрытом состоянии и конечным в открытом. Значение активного сопротивления ИК в открытом состоянии задаётся в окне «*Internal resistance Ron [Ohm]*» и не может быть нулевым. Величина этого сопротивления в открытом состоянии должна выбираться из условия получения устойчивого решения, т.к. при слишком малых значениях задача становится плохо

обусловленной и возникает ошибка.

Переход ИК из одного состояния в другое происходит «мгновенно».

В модели ИК параллельно собственно ключу подсоединена последовательная *RC*-цепь («*snubber circuit*»), служащая для подавления импульсов напряжения при коммутации. Её параметры («*Snubber resistance Rs*» и «*Snubber capacitance Cs*») задаются в соответствующих окнах интерфейса ключа. Если сопротивление равно бесконечности («*inf*») или ёмкость равна нулю, то цепь размыкается и не влияет на работу ключа. Однако следует учитывать, что ИК моделируется источником тока и при последовательном соединении ключей или при индуктивном характере нагрузки возникает некорректная цепь с последовательным включением

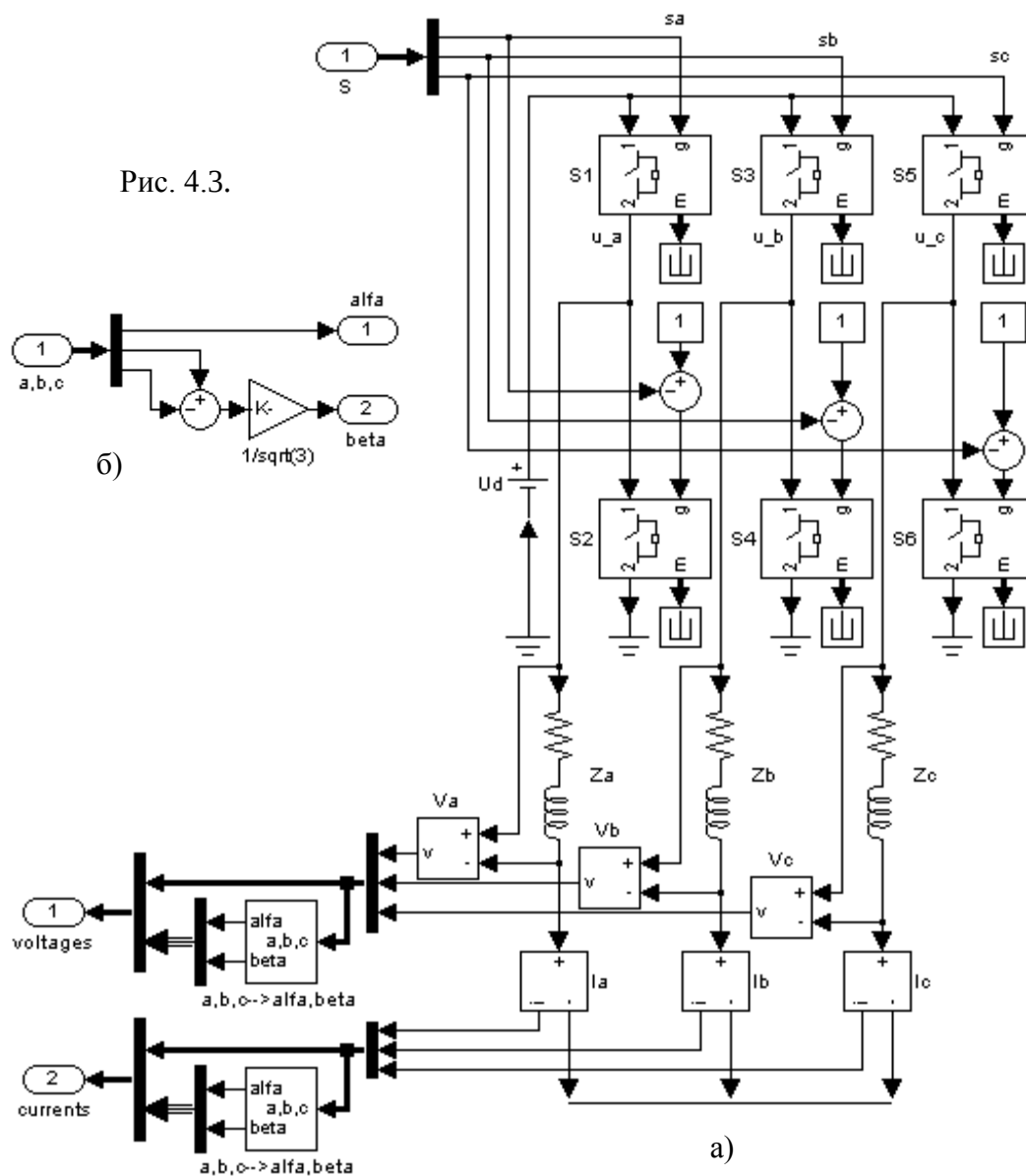
источников тока, что приводит к ошибке при моделировании. Поэтому шунтирующую цепь отключать нельзя и следует установить конечные значения её параметров, например, рекомендуемые разработчиком модели 10 Ом и 1 мкФ.

Управление ИК осуществляется подачей на вход «*gate*» логического сигнала

$$g = \begin{cases} > 0 & \text{при } i_s \neq 0 \\ 0 & \text{при } i_s = 0 \end{cases}$$

Модель ИК имеет также выход «*m*», на котором формируется вектор тока и падения напряжения на ключе ($i_s; u_s$), служащий для подключения соответствующих измерительных блоков.

На рис. 4.3, а показана модель инвертора, построенная на основе ИК с настройками рис. 4.2 для нечётных ключей (S1, S2, S3). Настройка чётных ключей отличается только закрытым начальным состоянием («*Initial state*»=1). Так как в рассматриваемой модели не предполагается исследование нагрузок на ключи, то их измерительные выходы «*m*» подключены к блокам «*Simulink/Sinks/Terminator*».



Питание ИН моделируется блоком идеального источника напряжения «*SimPowerSystems/Electrical Sources/DC Voltage Source*», вид и интерфейс которого показан на рис. 4.4, а. Амплитуда напряжения задаётся переменной «*Ud*», определённой в файле данных модели*.

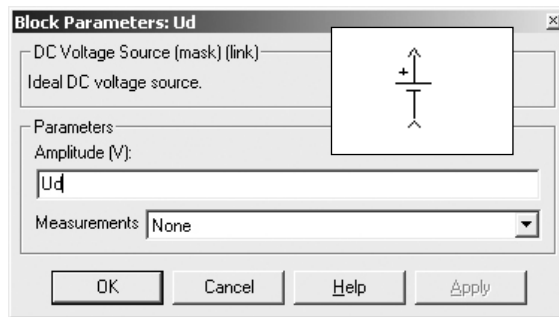
Соединение блоков библиотеки «*SimPowerSystems*» возможно только с помощью специальных элементов библиотеки «*SimPowerSystems/Connectors*». Для создания связи отрицательного полюса источника напряжения с выходами чётных ключей модели инвертора использованы блоки заземления «*Ground (input)*» и «*Ground (output)*» (рис. 4.4, б).

Сигналы управления или коммутационные функции «*sa*», «*sb*» и «*sc*» подаются на входы «*g*» соответствующих нечётных ключей модели инвертора

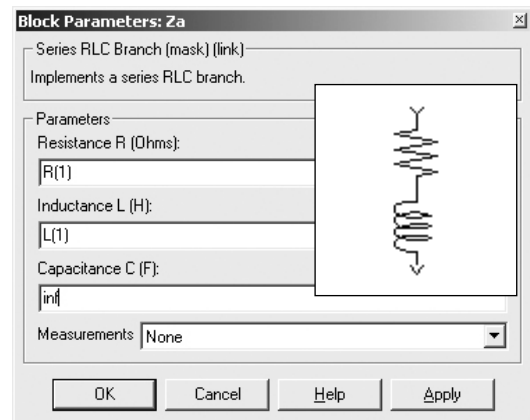
* см. раздел 4.3.

(рис. 4.3, а). Чётные ключи должны работать в противофазе, поэтому для них нужны инверсные коммутационные функции, которые формируются путём вычитания сигналов управления нечётными ключами из единицы, т.е.

$$s_{2n-1} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow s_{2n} = 1 - s_{2n-1} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad (4.1)$$



а)

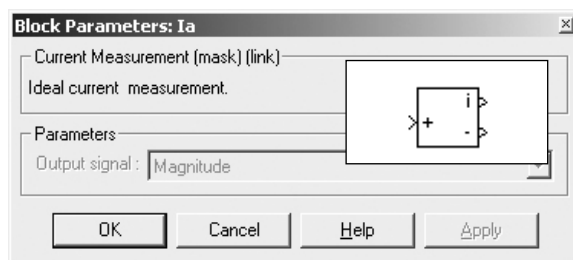


в)

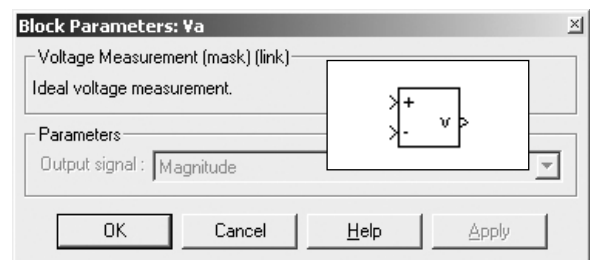


б)

Рис. 4.4.



г)



д)

где $n = [1, 2, 3]$ – номер ключа.

По условиям задачи нагрузкой ИН является RL -цепь, соединённая звездой без нулевого провода. Модель такой нагрузки можно создать, используя три элемента «*SimPowerSystems/Elements/Series RLC Branch*», вид и интерфейс которых показан на рис. 4.4, в. Сопротивление («*Resistance R [Ohm]*») и индуктивность («*Inductance L [H]*») фаз нагрузки определяются соответствующими координатами векторов $R = [R_1, R_2, R_3]$ и $L = [L_1, L_2, L_3]$, заданными в файле данных*.

Последовательно с фазными нагрузками в модели ИН включены блоки измерения фазных токов «*SimPowerSystems/Measurements/Current Measurement*» (рис. 4.4, г), необходимые для использования мгновенных значений токов в блоках основной библиотеки «*Simulink*». С той же целью параллельно фазным нагрузкам включены входы блоков измерения фазных напряжений «*SimPowerSystems/Measurements/Voltage Measurement*» (рис. 4.4,

д). Выходы блоков измерения токов с помощью шины «*SimPowerSystems/Connectors/Bus Bar (thin horiz)*» объединены в нулевую точку нагрузки.

Для построения векторов напряжения и тока нагрузки в модель инвертора на рис. 4.3, а включены блоки преобразования фазных координат abc в ортогональные $\alpha\beta$. Они реализованы в виде подсистем « $a,b,c \rightarrow \alpha,\beta$ » (рис. 4.3, б) в соответствии с выражениями (3.6).

Координаты напряжения в фазной и в ортогональной системах объединены в вектор «*voltages*» ($U = [u_a, u_b, u_c, u_\alpha, u_\beta]$) и выведены из блока инвертора для последующей визуализации результатов моделирования. Аналогично в виде вектора «*currents*» выведены координаты тока ($I = [i_a, i_b, i_c, i_\alpha, i_\beta]$).

Достоинством рассмотренной модели ИН с RL -нагрузкой является полное соответствие её структуры реальному объекту и связанная с этим наглядность моделирования, а также возможность исследования работы инвертора с несимметричной нагрузкой.

Использование в модели идеальных ключей приводит к задаче исследования процессов с чередующимися областями медленного и быстрого изменения переменных, т.е. эта задача плохо обусловлена. Система дифференциальных уравнений модели инвертора получается жёсткой и для получения правильного и устойчивого решения необходимо уменьшать величину шага и использовать многошаговые и итерационные методы, что сильно замедляет процесс моделирования. Вследствие априорной жёсткости системы разработчик модели ИК ввёл блокировку на использование простейших быстрых одношаговых алгоритмов, таких как *ode45* или *ode23*, и рекомендует алгоритмы *ode15s* или *ode23tb*. Их сопоставление показывает, что для описанной выше модели инвертора удовлетворительный результат с меньшей допустимой погрешностью даёт многошаговый алгоритм с переменным порядком *ode15s*.

Помимо значительных затрат времени на моделирование недостатком модели с ИК, является также возможность потери устойчивости решения или получение неверного решения при слишком малых или слишком больших значениях параметров нагрузки (R и/или L), что также связано с жёсткостью системы уравнений переменных состояния.

4.1.1.2. Модель на основе элементов библиотеки Simulink

Значительно ускорить моделирование можно использованием одношаговых методов решения. Для этого нужно отказаться от модели

инвертора, воспроизводящей структуру реального устройства. Однако сделать это без существенного усложнения модели можно только при условии симметрии нагрузки. В этом случае при всех ненулевых состояниях нагрузка инвертора оказывается соединённой по схеме рис. 4.1, б, т.е. напряжение на одной из фаз составляет $2U_d/3$, а на двух других, соединённых параллельно – $U_d/3$.

Для моделирования работы ИН с идеальными ключами (рис. 4.1, а) используем систему коммутационных функций полумостов с базисными значениями +1 и –1, где положительное значение соответствует замкнутому состоянию нечётного ключа и разомкнутому состоянию чётного, а отрицательное значение – противоположному состоянию ключей:

$$s_{2n-1} = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \Rightarrow s_{2n} = -s_{2n-1} = \begin{cases} -1 \\ +1 \end{cases}, \quad (4.2)$$

где $n = [1, 2, 3]$ – номер ключа.

Таблица 4.1.

Соответствие фазных напряжений коммутационным функциям

Коммутационные функции			Состояние инвертора	Фазные напряжения [В]		
s_a	s_b	s_c		u_a	u_b	u_c
+1	+1	+1		0	0	0
+1	+1	–1		$U_d/3$	$U_d/3$	$-2U_d/3$
+1	–1	+1		$U_d/3$	$-2U_d/3$	$U_d/3$
+1	–1	–1		$2U_d/3$	$-U_d/3$	$-U_d/3$
–1	+1	+1		$-2U_d/3$	$U_d/3$	$U_d/3$
–1	+1	–1		$-U_d/3$	$2U_d/3$	$-U_d/3$
–1	–1	+1		$-U_d/3$	$-U_d/3$	$2U_d/3$
–1	–1	–1		0	0	0

Такая система удобна тем, что знак коммутационной функции соответствует полярности напряжения средней точки полумоста и, следовательно, знаку соответствующего фазного напряжения.

Пользуясь принятой системой коммутационных функций, все возможные состояния ИН и значения фазных напряжений при условии симметрии нагрузки инвертора можно представить таблицей 4.1.

Анализируя таблицу 4.1, можно заметить, что напряжение в фазе a равно $\pm 2U_d/3$, если $s_b = s_c \neq s_a$. При этом знак u_a соответствует знаку коммутационной функции s_a , т.е. $u_a = \text{sign}(s_a) \cdot 2U_d/3 = s_a \cdot 2U_d/3$. В случае, если $s_b \neq s_c$, то $u_a = s_a \cdot U_d/3$, и, наконец, $u_a = 0$, если $s_b = s_c = s_a$. Эти соотношения можно выразить, пользуясь логическими функциями «И», «ИЛИ», «НЕ» и «ИСКЛЮЧАЮЩЕЕ ИЛИ». Однако логические выражения получатся довольно сложными и для их связи с величиной $\pm U_d/3$ потребуются включение режима преобразования булевых функций в арифметические значения с переходом от базиса $[1, 0]$ к базису $[+1, -1]$. Поэтому проще решить эту задачу с помощью арифметических операторов, заметив, что $|s_b + s_c| = 2|s_b = s_c|$ и $|s_b - s_c| = 2|s_b \neq s_c|$. Тогда для всех состояний ИН кроме нулевых фазное напряжение u_a можно представить в виде

$$u_a = \frac{U_d}{3} s_a (|s_b + s_c| + |s_b - s_c|/2). \quad (4.3)$$

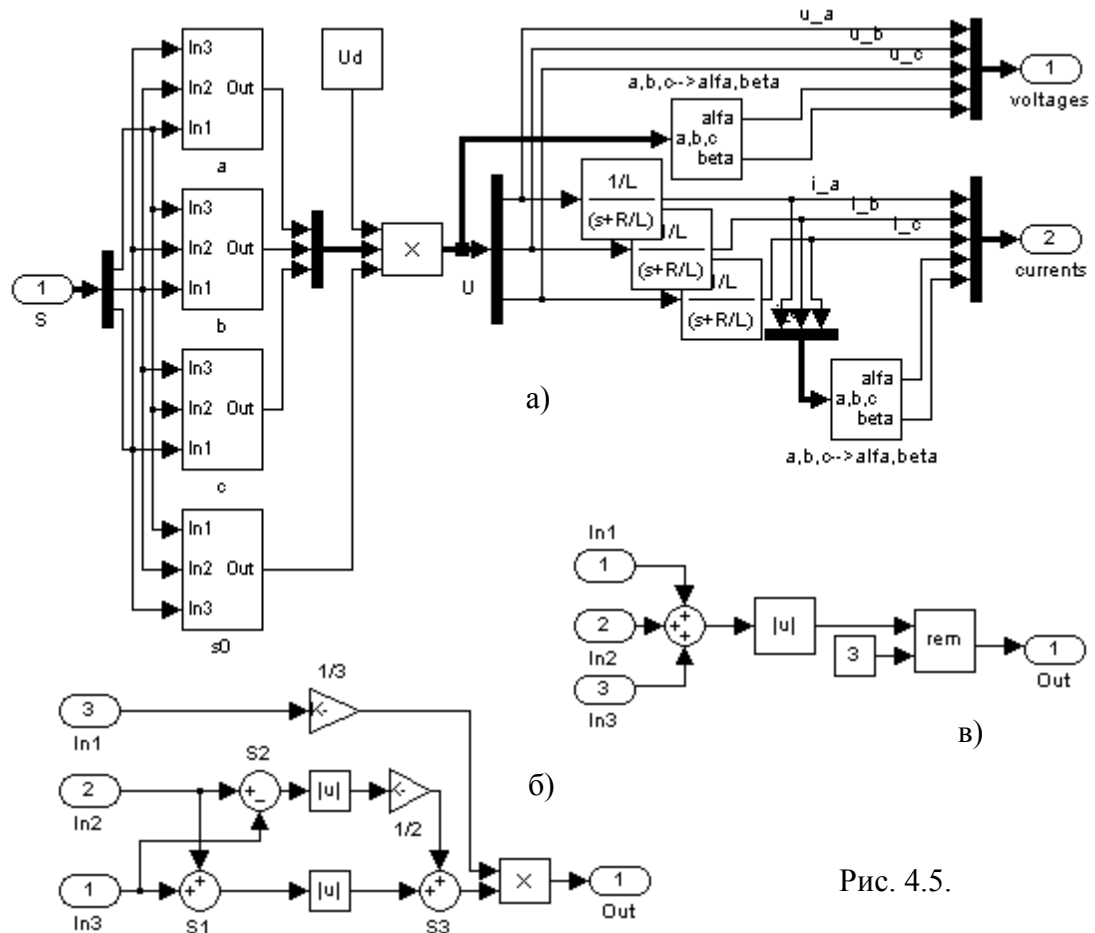


Рис. 4.5.

Модель этого преобразования показана на рис. 4.5, б. Сумма и разность коммутационных функций в скобках выражения (4.3) реализованы сумматорами S1 и S2 модели. Суммирование модулей полученных величин с учётом деления разности на два производится сумматором S3, после чего выполняется умножение на 1/3 значения функции s_a . В результате на выходе перемножителя формируется значение фазного напряжения в относительных единицах (u_a / U_d).

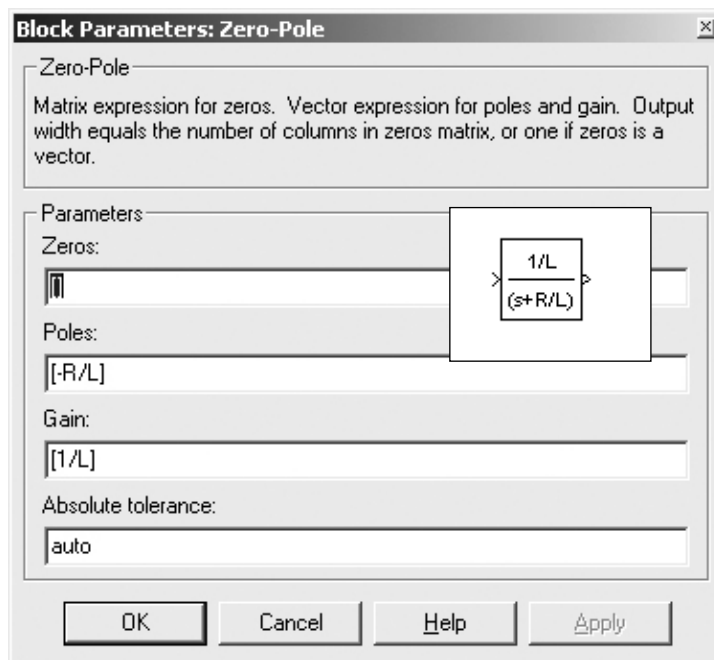


Рис. 4.6.

Если строки таблицы 4.1 переставить так, чтобы значения коммутационной функции s_b образовали в её столбце непрерывные последовательности из четырёх положительных и четырёх отрицательных значений, то фазное напряжение u_b также можно будет представить выражением (4.3) при условии замены в правой части индексов «b» на «c» и «c» на «a». Аналогично из выражения (4.3) можно заменой индексов «b» на «a»

и «c» на «b» получить фазное напряжение u_c .

Таким образом, все фазные напряжения для ненулевых состояний инвертора можно получить одинаковыми блоками с циклическим смещением входных коммутационных функций так, как это показано на рис. 4.5, а.

Нулевые состояния инвертора, соответствующие одинаковым значениям коммутационных функций, можно вычислить, используя операцию вычисления остатка от деления на три, с учётом того, что при условии $s_a = s_b = s_c$ сумма функций будет равна ± 3 , т.е. остаток равен нулю, а во всех остальных случаях остаток равен ± 1 . Тогда для абсолютного значения суммы

$$s_0 = \text{rem}(|s_a + s_b + s_c| / 3) = \begin{cases} 0 & |s_a = s_b = s_c \\ 1 & \end{cases} \quad (4.4)$$

и для всех состояний фазное напряжение u_a можно найти как

$$u_a = \frac{U_d}{3} s_0 s_a (|s_b + s_c| + |s_b - s_c|/2). \quad (4.5)$$

Вычисление значения s_0 можно выполнить с помощью блока «*Simulink/User-Defined Functions/MATLAB Fcn*». Однако использование этого блока связано с обращением к интерпретатору на каждом расчётном шаге, что значительно замедляет моделирование. Поэтому функция (4.4) вычисляется подсистемой «*s0*», структура которой показана на рис. 4.5, в.

В модели ИН включение нулевых состояний и переход к абсолютным значениям фазных напряжений осуществляется умножением выходных сигналов блоков «*a*», «*b*» и «*c*» на s_0 и U_d (см. рис. 4.5, а). В результате мы получим вектор фазных напряжений $U = [u_a, u_b, u_c]$. Значение напряжения питания инвертора задаётся переменной «*Ud*», определённой в файле данных модели.

Нагрузкой фаз инвертора является последовательная RL -цепь, следовательно, фазный ток равен

$$u_q = i_q R + L \frac{di_q}{dt} \Rightarrow i_q(p) = \frac{u_q(p)}{R + pL},$$

где $q = [a, b, c]$, и его можно вычислить, используя блок «*Simulink/Continuous/Zero-Pole*», вид, интерфейс и настройки которого показаны на рис. 4.6.

Полная модель ИН с симметричной RL -нагрузкой показана на рис. 4.5, а. Здесь выходные векторы напряжений и токов формируются аналогично модели на рис. 4.3.

Моделирование можно выполнять с помощью одношагового алгоритма *ode45*, что при аналогичных настройках существенно сокращает время по сравнению с моделью, построенной с использованием идеальных ключей библиотеки «*SimPowerSystems/Power Electronics*». Кроме того, модель рис. 4.5 устойчива и при всех конечных значениях параметров нагрузки даёт верное решение.

Недостатком модели является необходимое условие симметрии нагрузки.

4.1.2. Управление инвертором

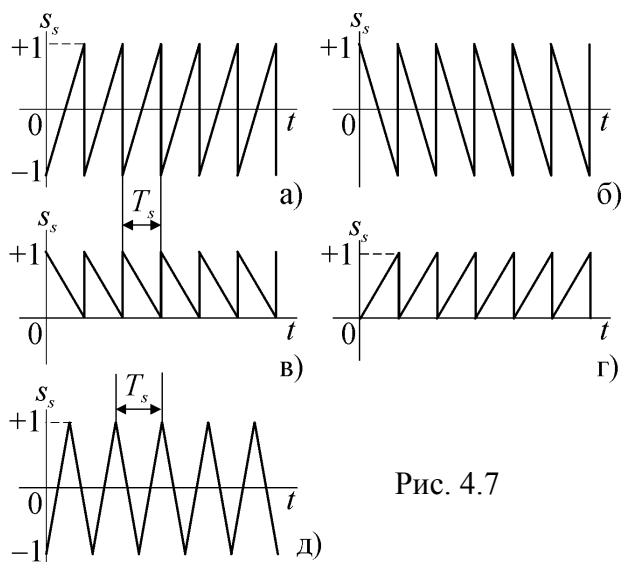


Рис. 4.7

случае в системе управления создаётся обратная связь по фазным токам, а в контуры регулирования включаются двухпозиционные реле с гистерезисом, создающие т.н. «токовые коридоры»^{**}. В разделе 3 были рассмотрены основные принципы этих трёх типов управления. Остановимся теперь на возможных вариантах их реализации при моделировании.

4.1.2.1. Широтно-импульсная модуляция

Модуляция ширины импульсов коммутационных функций осуществляется с помощью вертикального принципа или, иначе говоря, методом линейной развёртки. Для модуляции одного из фронтов импульсов инвертора (односторонняя ШИМ) формируется несимметричный «пилообразный» сигнал развёртки (рис. 4.7, а-г). В случае двухсторонней ШИМ формируется симметричный «пилообразный» сигнал (рис. 4.7, д). В дальнейшем мы будем моделировать работу инвертора с двухсторонней ШИМ и, соответственно, использовать симметричный генератор развёртки.

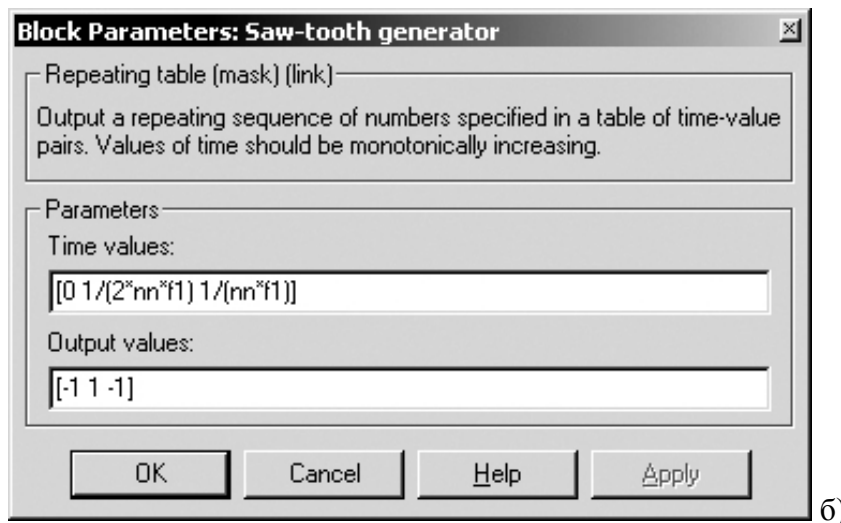
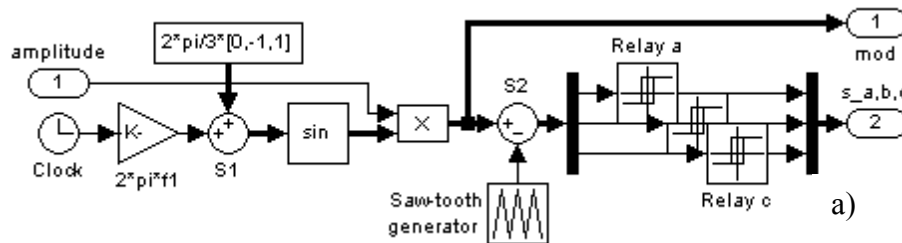
Управление инвертором при моделировании и на практике сводится к задаче формирования коммутационных функций. Наиболее распространёнными способами управления выходным напряжением являются широтно-импульсная (ШИМ) и пространственно-векторная (ПВМ)^{*} модуляция. Кроме того ИН используются для формирования тока нагрузки с помощью гистерезисных регуляторов. В этом

^{*} PWM (pulse-wide modulation), SVM (space vector modulation) в англоязычной литературе

^{**} HCC (hysteresis current control) в англоязычной литературе

Коммутационные функции получаются в результате сравнения сигнала развёртки с сигналом модуляции, задающим закон изменения ширины импульсов во времени. Сигнал модуляции является периодической функцией времени с частотой, равной частоте основной гармоники напряжения и тока ИН. В трёхфазном ИН необходимо сформировать три сигнала модуляции,

смещённые по фазе относительно друг друга на треть периода.



Сигналы модуляции могут иметь различную форму: треугольную,

Рис. 4.8.

трапецеидальную, синусоидальную. Оптимальной формой, обеспечивающей наилучший гармонический состав напряжений и токов ИН, т.е. минимальную мощность спектра высших гармоник, является синусоидальная форма. В дальнейшем мы в основном будем рассматривать именно синусоидальную ШИМ, т.к. в настоящее время другие формы модуляции практически не используются.

Однако для получения наилучшего гармонического состава кроме формы сигнала модуляции необходима его синхронизация с сигналом развёртки. Это обеспечивается, если частота развёртки кратна утроенной частоте сигнала модуляции. Тогда в пределах фазового смещения (120°) укладывается целое число периодов развёртки и картина процессов во всех фазах одинакова. В противном случае в выходном напряжении и токе появляются нежелательные субгармоники, т.е. гармоники с частотой меньше частоты модуляции.

На рис. 4.8, а показана модель генератора коммутационных функций (ГКФ). Линейно нарастающий сигнал времени t (блок «Simulink/Sources/Clock») преобразуется умножением на $2\pi f_1$ в линейно

изменяющийся сигнал фазового угла $2\pi f_1 t = \omega_1 t$, определяемый значением заданной частоты модуляции f_1 .

Фазовый угол $\omega_1 t$ складывается с вектором фазового смещения $2\pi/3 \times [0, -1, 1]$ и образует на выходе сумматора S1 вектор текущих значений фазовых углов $[\omega_1 t, \omega_1 t - 2\pi/3, \omega_1 t + 2\pi/3]$, которые блоком «Simulink/Math Operations/Trigonometric Functions» преобразуются в фазные синусоидальные сигналы модуляции с единичной амплитудой (рис. 4.9, 1). Регулирование амплитуды сигналов модуляции осуществляется сигналом U_m , подаваемым на вход «amplitude» ГКФ, и в окончательном виде они формируются на входе сумматора S2 и на выходе «mod»:

$$\begin{aligned} u_{ma}(t) &= U_m \sin(2\pi f_1 t); \\ u_{mb}(t) &= U_m \sin(2\pi f_1 t - 2\pi/3); \\ u_{mc}(t) &= U_m \sin(2\pi f_1 t + 2\pi/3) \end{aligned} \quad (4.6)$$

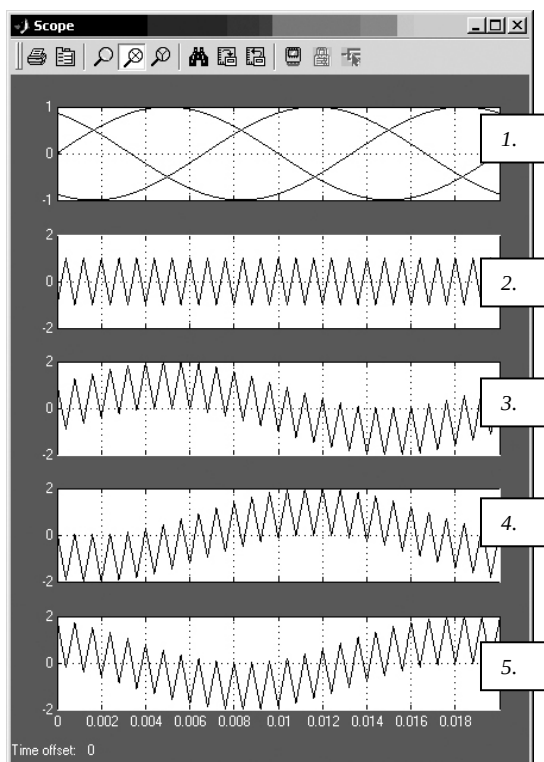


Рис. 4.9.

Симметричный двухполярный сигнал развёртки с единичной амплитудой (рис. 4.9, 2) формируется генератором «пилообразного» напряжения («Saw-tooth generator» на рис. 4.8, а). Он представляет собой блок «Simulink/Sources/Repeating Sequence», настройки которого показаны на рис. 4.8, б. Вектор «Time values» задаёт моменты времени, соответствующие вершинам пилообразного сигнала, а вектор «Output values» — значения сигнала в этих вершинах.

Для получения коммутационных функций сигнал развёртки $u_s(t)$ нужно сравнить с сигналами модуляции. Это можно сделать множеством способов с использованием различных блоков

библиотеки «Simulink». На рис. 4.8, а показан один из вариантов решения, где из фазных сигналов модуляции вычитается сигнал развёртки. В результате на выходе сумматора S2 сигналы развёртки смещаются на величину соответствующего сигнала модуляции.

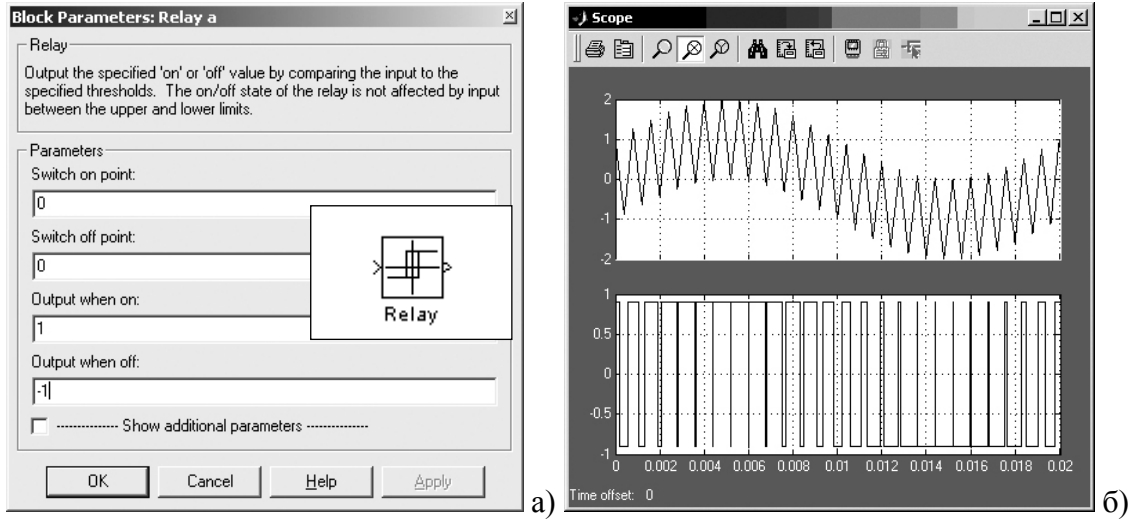


Рис. 4.10

$$\begin{aligned}
 u_{sma}(t) &= u_{ma}(t) - u_s(t) = U_m \sin(2\pi f_1 t) - u_s(t); \\
 u_{smb}(t) &= u_{mb}(t) - u_s(t) = U_m \sin(2\pi f_1 t - 2\pi/3) - u_s(t); \\
 u_{smc}(t) &= u_{mc}(t) - u_s(t) = U_m \sin(2\pi f_1 t + 2\pi/3) - u_s(t).
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

На рис. 4.9, 3...5 показаны эти сигналы для случая единичной амплитуды сигналов модуляции.

Интервалы времени, когда модулированный сигнал развёртки превышает нулевое значение или меньше этого значения, соответствуют величине сигнала модуляции в пределах соответствующего периода развёртки. Следовательно, с помощью двухпозиционного реле, принимающего значения +1 и -1 при переходе входного сигнала через нуль (см. настройки на рис. 4.10, а), можно получить требуемую коммутационную функцию. Пример такой функции показан на рис. 4.10, б в уменьшенном на 10% масштабе, чтобы статические состояния не сливались с границами окна.

Скважность коммутационной функции на k -м интервале γ_k , при условии, что величина сигнала $u_{smq}(t)$ не превышает амплитуду сигнала развёртки U_s равна

$$0 \leq \gamma_k = \frac{\tau_k}{T_s} = \frac{1}{2} \left[1 + \left| \sin \left(\frac{2\pi}{n} k \right) \right| \frac{U_m}{U_s} \right] \leq 1, 0, \quad (4.8)$$

где: τ_k – длительность импульса, совпадающего по знаку со знаком сигнала модуляции; $n = f_s / f_m$ – кратность частоты сигнала развёртки, а $k = 0, 1, \dots, n$ – номер интервала.

Выражение (4.8) справедливо при условии

$$\left| \sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right) \right| \frac{U_m}{U_s} \leq 1. \quad (4.9)$$

В противном случае система управления инвертором входит в режим насыщения и длительность импульсов становится равной периоду сигнала развёртки $\tau_k = T_s$.

Очевидно, что условие (4.9) справедливо при любых значениях k , если $U_m \leq U_s$ или $U_m/U_s = \nu_m \leq 1$, где ν_m – относительная амплитуда сигнала модуляции.

При выходе ν_m за единичный предел часть импульсов коммутационной функции в области максимумов сигнала модуляции сливается в один импульс.

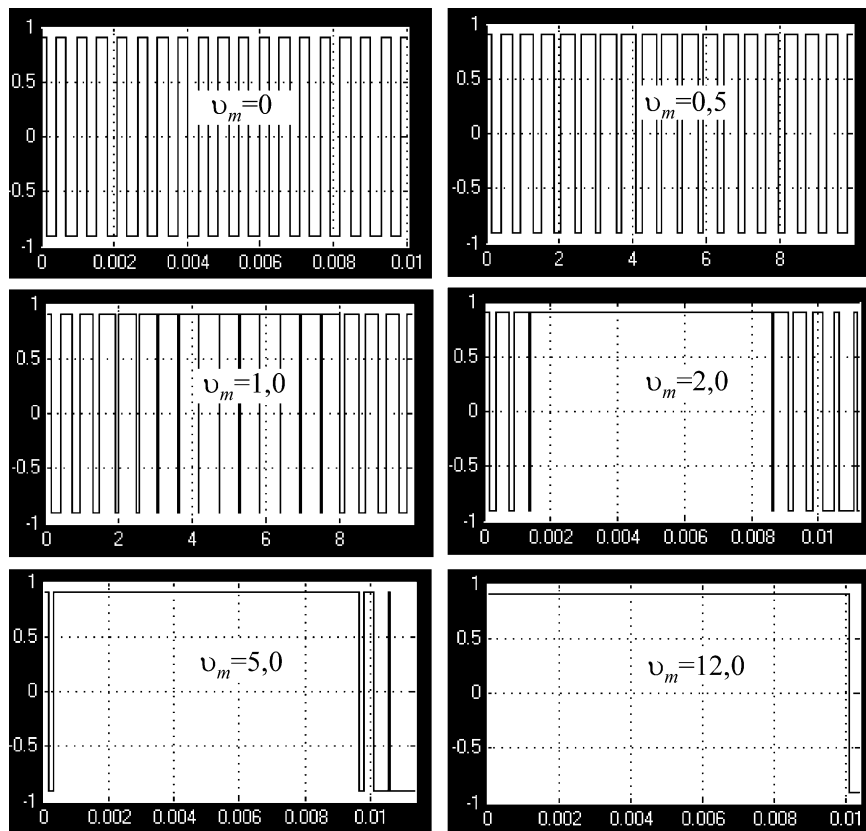


Рис. 4.11.

Возрастание относительной амплитуды до значений, при которых сигнал модуляции выходит за уровень амплитуды сигнала развёртки в течение половины периода T_s , т.е. условие

$$\nu_m > \frac{1}{\sin(\pi/n)}, \quad (4.10)$$

приводит к тому, что коммутационная функция превращается в импульс длительностью 180° эл. На рис. 4.11 приведён ряд коммутационных функций, построенных при кратности частоты развёртки $f_s / f_1 = n = 36$.

Для упрощения графики в модели генератора, показанной на рис. 4.8, а, фазные коммутационные функции на выходе объединены в вектор «s_a,b,c».

4.1.2.2. Пространственно-векторная модуляция

Формирование коммутационных функций при ПВМ также можно осуществлять множеством способов. Рассмотрим один из них, используемый в данной модели для работы по алгоритму IV*.

Построим модель ГКФ, пользуясь тем, что алгоритм коммутации при формировании вектора напряжения в пределах любого из шести секторов между двумя базовыми векторами одинаков. Тогда достаточно реализовать его, например, для первого сектора, а затем повторять, поочередно переключаясь на следующую пару базовых векторов.

Длительности интервалов коммутации для первого и второго базовых векторов определяются синусными функциями выражений (3.23). Аргумент этих функций ϕ можно задавать в непрерывной или в дискретной форме. Используем здесь, в отличие от ШИМ, дискретную форму модуляции, но сохраним при этом синхронный режим.

Так как алгоритм формирования импульсов мы будем строить для одного сектора базовых векторов и в его пределах при синхронной модуляции должно быть целое число расчетных интервалов, то число интервалов дискретизации на периоде частоты основной гармоники должно быть кратно шести. Тогда относительные длительности интервалов формирования базовых векторов будут определяться выражениями

$$\begin{aligned}\tau_{1k} &= v_m \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{n}k\right); \\ \tau_{2k} &= v_m \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right); \\ \tau_{0k} &= 1 - \tau_{1k} - \tau_{2k},\end{aligned}\tag{4.11}$$

где: v_m – относительная амплитуда модуляции; $n = f_s / f_1$ – число интервалов дискретизации на периоде основной гармоники; $k = 0, 1, \dots, [f_s / (6 f_1) - 1]$ – номер интервала дискретизации в пределах 1/6 части периода.

* см. раздел 3.3.2.2

Для реализации вычислений (4.11) нужно сформировать периодическую последовательность чисел k . В ГКФ (рис. 4.12, *а*) эту функцию выполняет блок «*Clock-pulses generator*» модель которого показана на рис. 4.13, *б*. Здесь в качестве дискретизаторов используются блоки «*Simulink/Discrete/Zero-Order Hold*». Для блока, формирующего последовательность номеров секторов «*Simulink/Discrete/Zero-Order Hold s*», время дискретизации равно $1/(6f_1)$, а для блока, формирующего номера интервалов «*Simulink/Discrete/Zero-Order Hold i*» – в $n/6$ раз меньше (см. рис. 4.13). После умножения дискретизированного времени на $6f_1$ и $n \cdot f_1$ мы получим на выходах блоков «*Simulink/Math Operators/Gain*» непрерывно возрастающие целочисленные последовательности с длительностями статических состояний равными соответствующим временам дискретизации.

Цикличность последовательностей чисел легко создаётся вычислением остатка от деления на величину периода цикла. Поэтому для получения номера сектора нужно разделить соответствующую последовательность на шесть, а для получения номера интервала – на $n/6$. Так как для дальнейшей обработки сигнала требуется номер интервала с нулевым базовым значением, то результат деления подаётся непосредственно на выход генератора. Базовым значением номера сектора должна быть единица, поэтому к результату деления прибавляется единица (сумматор «*S1*» на рис. 4.12, *б*). Сигналы номера сектора «*s_number*» и номера интервала «*i_number*», формируемые генератором, показаны на рис. 4.13, *г*.

В соответствии с алгоритмом IV коммутация ключей полумоста, соответствующего обмотке, ось которой совпадает с базовым вектором, ограничивающим начало сектора, не производится. Так в первом секторе не коммутируются ключи фазы a , во втором – фазы c , и далее $b-a-c-b$. На рис. 4.13, в показаны базовые векторы и знаки соответствующих им коммутационных функций. Некоммутируемые полумосты имеют знаки функций, отличающиеся от знаков двух коммутируемых полумостов. Нетрудно заметить, что при переходе от одного сектора к другому знак функции некоммутируемого полумоста меняется на противоположный. Поэтому для получения этих функций нужно сформировать положительный единичный сигнал в пределах нечётных секторов и отрицательный в пределах чётных.

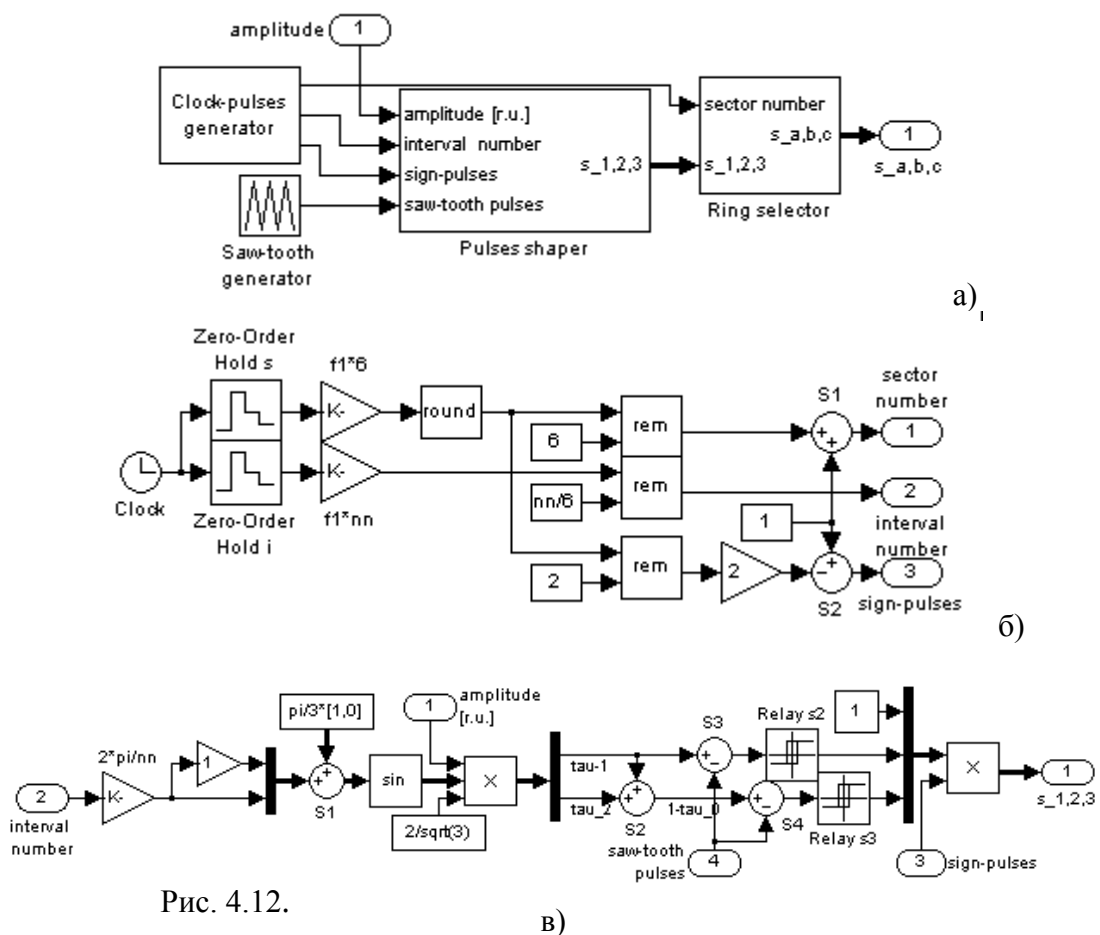


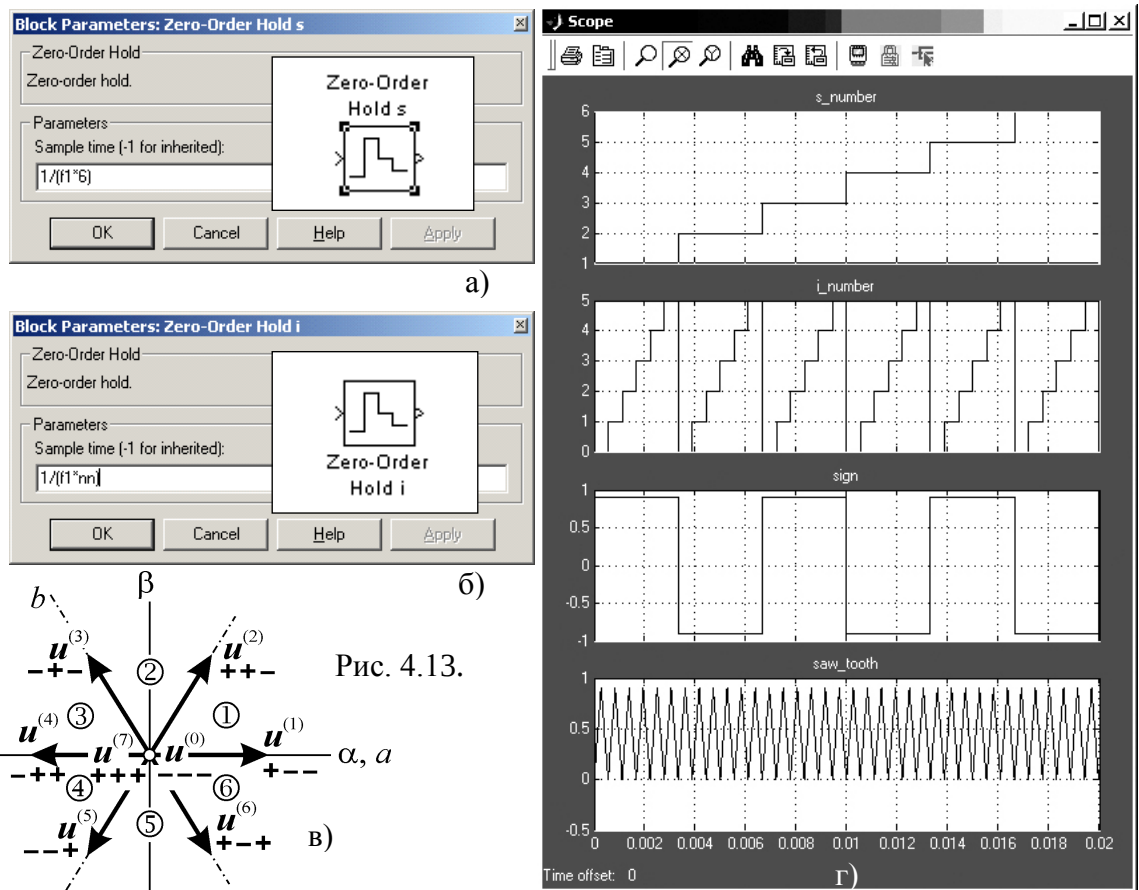
Рис. 4.12.

в)

Такая функция «*sign-pulses*» легко формируется как остаток от деления на два номера сектора с последующим умножением на два и смещением на единицу, чтобы получить двухполярный сигнал, показанный на рис. 4.13, г («*sign*»).

Следует заметить, что сигналы номера сектора и знака должны быть целыми числами. Однако при дискретизации возникает накапливающаяся

ошибка в виде некоторой малой дробной части, которая, тем не менее, приводит к возникновению сбоев при коммутациях. Поэтому численную последовательность, формирующую эти сигналы, необходимо преобразовать округлением. Для этого служит блок «*Simulink/Math Operators/Rounding Functions*» на рис. 4.12, б. Сигнал номера интервала можно не округлять, т.к. в дальнейшем он используется как число k в аргументе функций (4.11) и небольшая дробная часть не вносит сколько-нибудь существенной погрешности в моделирование.



Для формирования коммутационных функций при ПВМ нужен однополярный сигнал симметричной развёртки с периодом равным длительности интервалов модуляции. Очевидно, что генератор «*Saw-tooth generator*» на рис. 4.12, а будет аналогичен генератору модели ШИМ (рис. 4.8, б) с той лишь разницей, что в его настройке (рис. 4.8, б) вместо отрицательных значений вектора «*Output values*» будут нулевые значения. Получаемый на выходе сигнал развёртки показан на рис. 4.13, г («*saw-tooth*»).

Основным элементом ГКФ является блок формирования импульсов

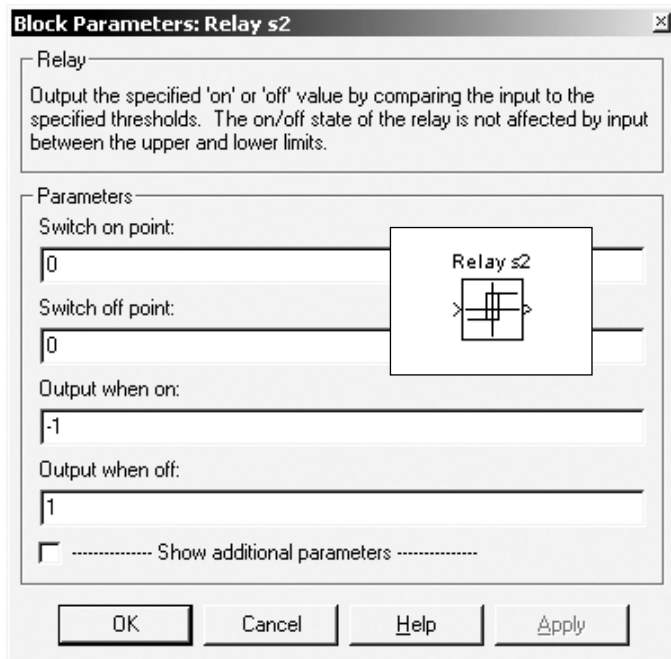


Рис. 4.14

коммутации «Pulses shaper» (рис. 4.12, в). В нём последовательность номеров интервалов «interval number» умножением на величину угла, соответствующую их длительности $2\pi/n$, преобразуется в последовательность аргументов синусных функций (4.11). После чего эти функции вычисляются, а затем умножением на относительную величину амплитуды («amplitude [r.u.]») и коэффициент $2/\sqrt{3}$ вычисляются относительные

длительности формирования граничных базовых векторов τ_{1k} и τ_{2k} .

Как следует из рис. 3.20, импульсы управления коммутируемыми полумостами получаются в результате сравнения нормированного сигнала развёртки $u_s(t)$ со значениями τ_1 и $1-\tau_0=\tau_1+\tau_2$. Это сравнение осуществляется сумматорами «S3» и «S4» на рис. 4.12, в, и далее с помощью

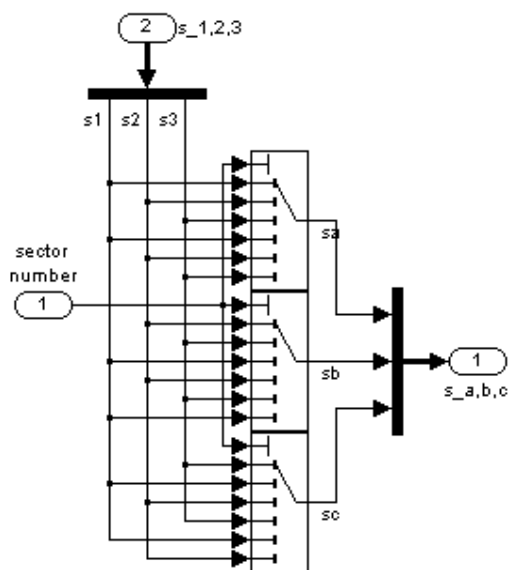


Рис. 4.15

двухпозиционных реле «Relay s2» и «Relay s3» формируются сигналы коммутации для второго и третьего полумостов. Они объединяются в вектор с постоянным единичным сигналом коммутации первого полумоста и умножаются на сигнал «sign-pulses», обеспечивающий инверсию знаков коммутационных функций при переходах в соседний сектор модуляции. Следует заметить, что в модели управления ИН, построенным на идеальных силовых ключах, выходной сигнал «Output when on» отличается от настройки реле показанной на рис. 4.14 и равен нулю.

Последним блоком ГКФ является кольцевой селектор («Ring selector» на рис. 4.13, а), обеспечивающий распределение импульсов коммутации по полумостам ИН в соответствии с

текущим значением номера сектора модуляции. Структура его модели приведена на рис. 4.15. Он состоит из трёх переключателей «*Simulink/Signal Routing/Multiport Switch*» управляющие входы которых подключены ко входу блока «*sector number*», а выходы образуют вектор коммутационных функций полумостов «*s_{a,b,c}*». Требуемая связь импульсов коммутации «*s_{1,2,3}*» с управлением полумостами обеспечивается соединением входов ключей блока в соответствии с алгоритмом работы ИН в каждом секторе модуляции.

4.1.2.3. Формирование токов с помощью гистерезисных регуляторов

Простейший ГКФ получается при формировании фазных токов гистерезисными регуляторами. В этом случае сигналы заданных фазных токов формируются в виде трёх синусоидальных функций времени с заданной

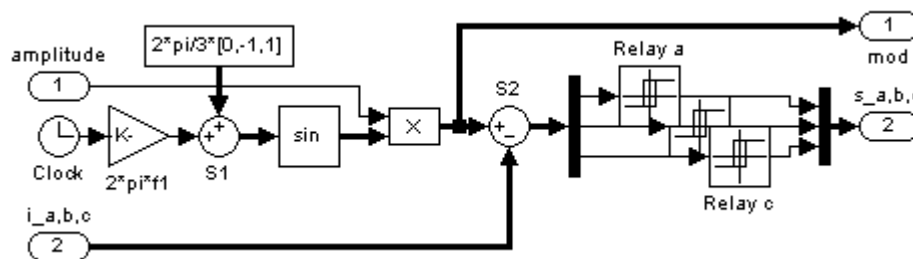


Рис. 4.16

частотой, амплитудой и начальными фазами, смещёнными на 120°эл. На рис.

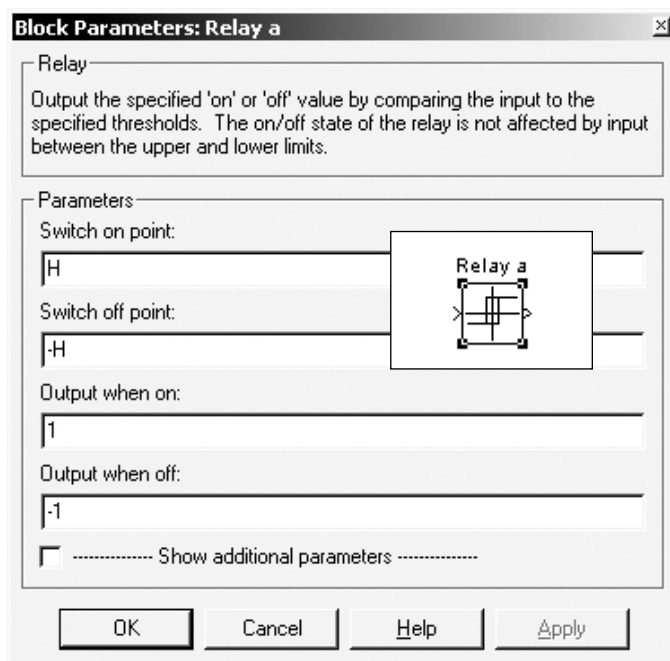
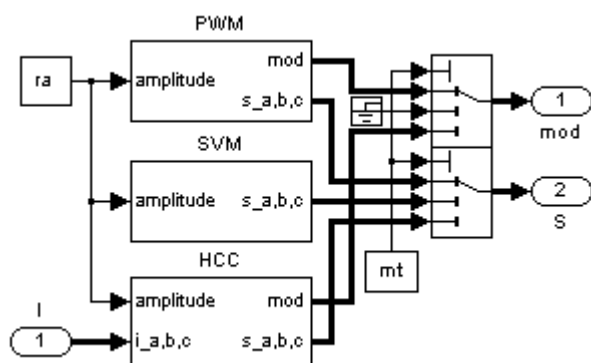


Рис. 4.17

4.16 эта задача решается преобразованием сигнала времени на выходе блока «*Simulink/Sources/Clock*» в сигнал текущего значения угла путём умножения на $2\pi f_1$, и последующим формированием вектора трёх синусоидальных функций, начальные фазы которых определяются вектором констант на входе сумматора «*S1*» ($2\pi/3 \cdot [0, -1, 1]$). Амплитуда сигналов задания токов в амперах определяется входным сигналом «*amplitude*».

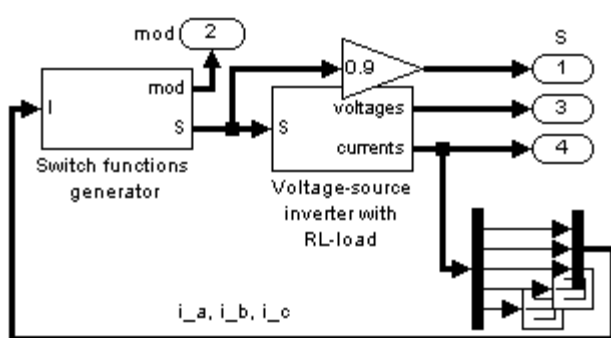
Таким образом, на суммирующем входе элемента «*S2*» и на выходе «*mod*» формируется трёхмерный вектор заданных фазных токов. Его координаты сравниваются с

реальными фазными токами на входе « $i_{a,b,c}$ » и сигналы ошибок подаются на входы фазных гистерезисных регуляторов, настройки которых показаны на рис. 4.17. Величина H является заданным значением гистерезиса регулятора и определяется в файле данных модели. Выходные сигналы регуляторов образуют вектор коммутационных функций ИН « $s_{a,b,c}$ ».



Все три генератора «*PWM*», «*SVM*» и «*HCC*» имеют вход задания амплитуды «*amplitude*». Величина этого сигнала определяется переменной «*ra*» блока «*Simulink/Sources/Constant*».

относительных единицах. В генераторе «*SVM*» на этот вход подаётся значение модуля заданного вектора напряжения, приведённое к модулю ненулевых базовых векторов ИН. В генераторе «*HCC*», в отличие от двух других генераторов, сигнал на входе «*amplitude*» определяет амплитуду заданных фазных токов в абсолютных единицах.



выход вектора сигналов модуляции «*mod*». В генераторе «*SVM*» этот сигнал отсутствует, т.к. модуляция осуществляется дискретным способом по секторам. Подключение сигналов коммутационных функций и модуляции отдельных генераторов к выходам «*S*» и «*mod*» блока универсального

генератора осуществляется переключателями, управляемыми сигналом задания режима моделирования «*mt*».

Генератор коммутационных функций и инвертор объединены в общую подсистему, показанную на рис. 4.19. В ней с помощью двух элементов «*Simulink/Signal Routing/Demux*» создана обратная связь, необходимая для работы ГКФ в режиме «токового коридора». Таким образом, модель инвертора представляет собой один блок, имеющий только выходы векторов сигналов синусоидальной модуляции «*mod*», коммутационных функций «*S*», напряжений «*voltages*» и токов «*currents*» в виде фазных и ортогональных проекций. Управление моделью осуществляется заданием переменных в файле данных.

4.2. Обработка и визуализация результатов моделирования

Подключение к модели инвертора элементов обработки информации и её визуализации зависит от задач моделирования. На рис. 4.20 приведён пример использования блоков «*Simulink/Sinks/Scope*» и «*Simulink/Sinks/XY Graph*» для

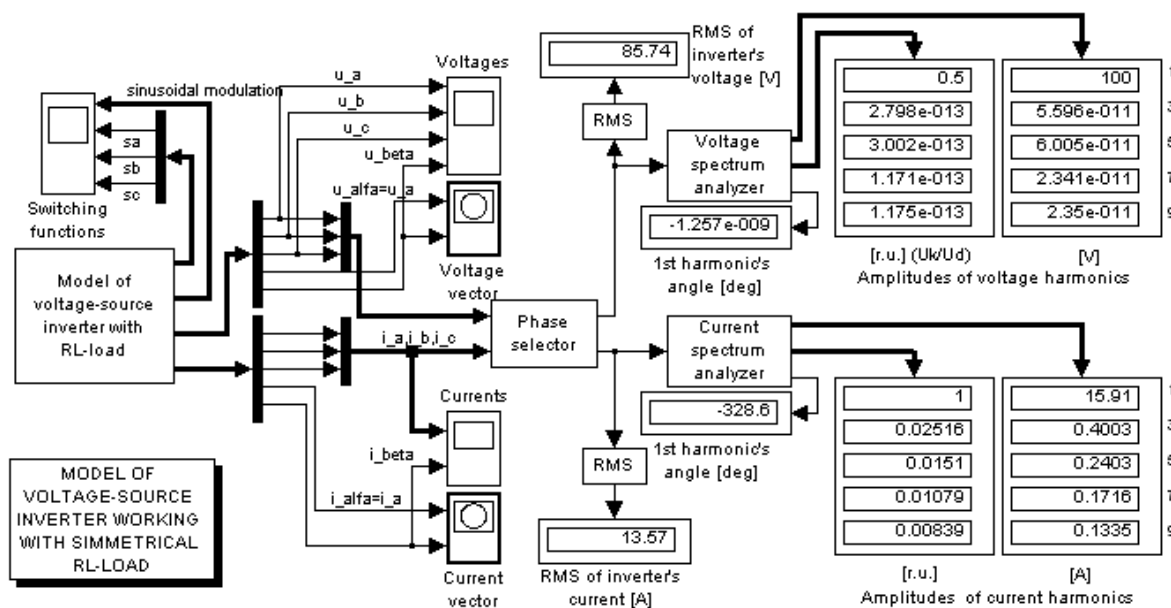


Рис. 4.20.

наблюдения за изменениями различных сигналов. Сигналы модуляции и коммутационные функции «*sa*», «*sb*» и «*sc*» можно наблюдать в окне «*Switching functions*». Причём величина импульсов коммутации уменьшена на 10% для того, чтобы они не сливались с границами окон сигналов.

Наблюдение за сигналами фазных напряжений и токов осуществляется с помощью элементов «*Simulink/Sinks/Scope/Voltages*» и «*Simulink/Sinks/Scope/Currents*». Одновременно в процессе моделирования в окнах «*Voltage vector*» и «*Current vector*» производится построение пространственных векторов напряжения и тока нагрузки.

Измерение параметров импульсных токов и напряжений представляет собой более сложную задачу, чем наблюдение. В большинстве случаев эти параметры являются интегральными величинами и для них нужно задать интервал интегрирования. В модели на рис. 4.20 эту функцию, наряду с функцией выбора фазы нагрузки, к которой подключаются измерительные блоки, выполняет блок «*Phase selector*». Структура этого блока показана на рис. 4.22, а. Выбор выходного напряжения «*u*» и тока «*i*» осуществляется переключателями «*S_u1*» и «*S_i1*», управляемыми сигналом номера подключаемой фазы «*pn*», а выбор интервала времени, в котором производится измерение – ключами «*S_u2*» и «*S_i2*». В данной модели предполагается, что интервал моделирования, задаваемый переменной «*Stop Time*», кратен длительности периода основной гармоники и составляет N периодов. Поэтому для получения результатов, соответствующих

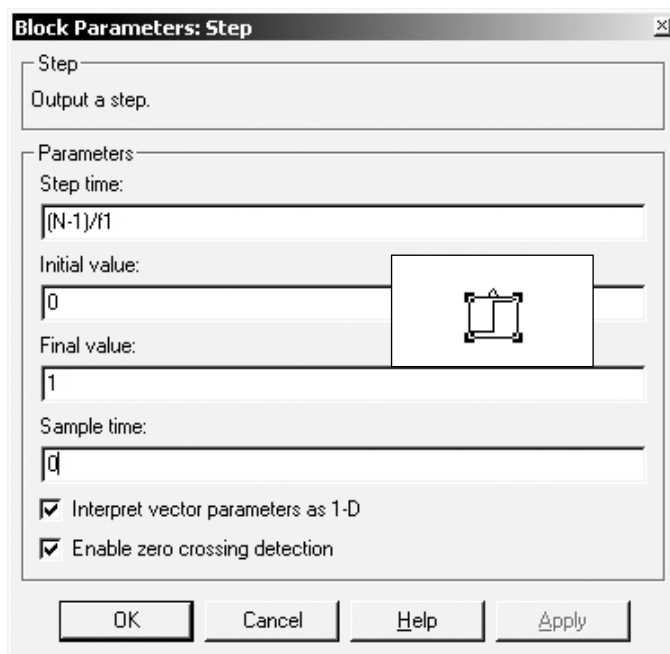


Рис. 4.21

статическому режиму, нужно включить измерение в момент начала последнего периода. Это осуществляется блоком «*Simulink/Sources/Step*», формирующим на выходе единичный сигнал в момент времени $(N - 1) / f_1$ (рис. 4.21) и переводящим тем самым ключи «*S_u2*» и «*S_i2*» из положения нулевого сигнала в положение передачи сигналов напряжения и тока фазы, соответствующей состоянию ключей «*S_u1*» и «*S_i1*». Задачу интегрирования в заданном

значении интервала времени можно решить не прибегая к явному выделению этого интервала, а используя блок «*Simulink/Continuous/Transport Delay*», создающий задержку сигнала на заданное время. В данном случае на время интегрирования. Однако работа этого блока существенно замедляет процесс моделирования.

В модели рис. 4.20 производится измерение действующих значений фазных напряжений и токов, а также амплитуд их гармоник с первой по девятую.

Действующие значения сложных импульсных сигналов $a(t)$ вычисляются блоками «RMS»* (рис. 4.21, б) в соответствии с выражением

$$A = \sqrt{f_1 \int_0^{1/f_1} a(t)^2 dt},$$

где f_1 – частота основной гармоники сигнала. Результат вычисления визуализируется блоками «Simulink/Sinks/Display».

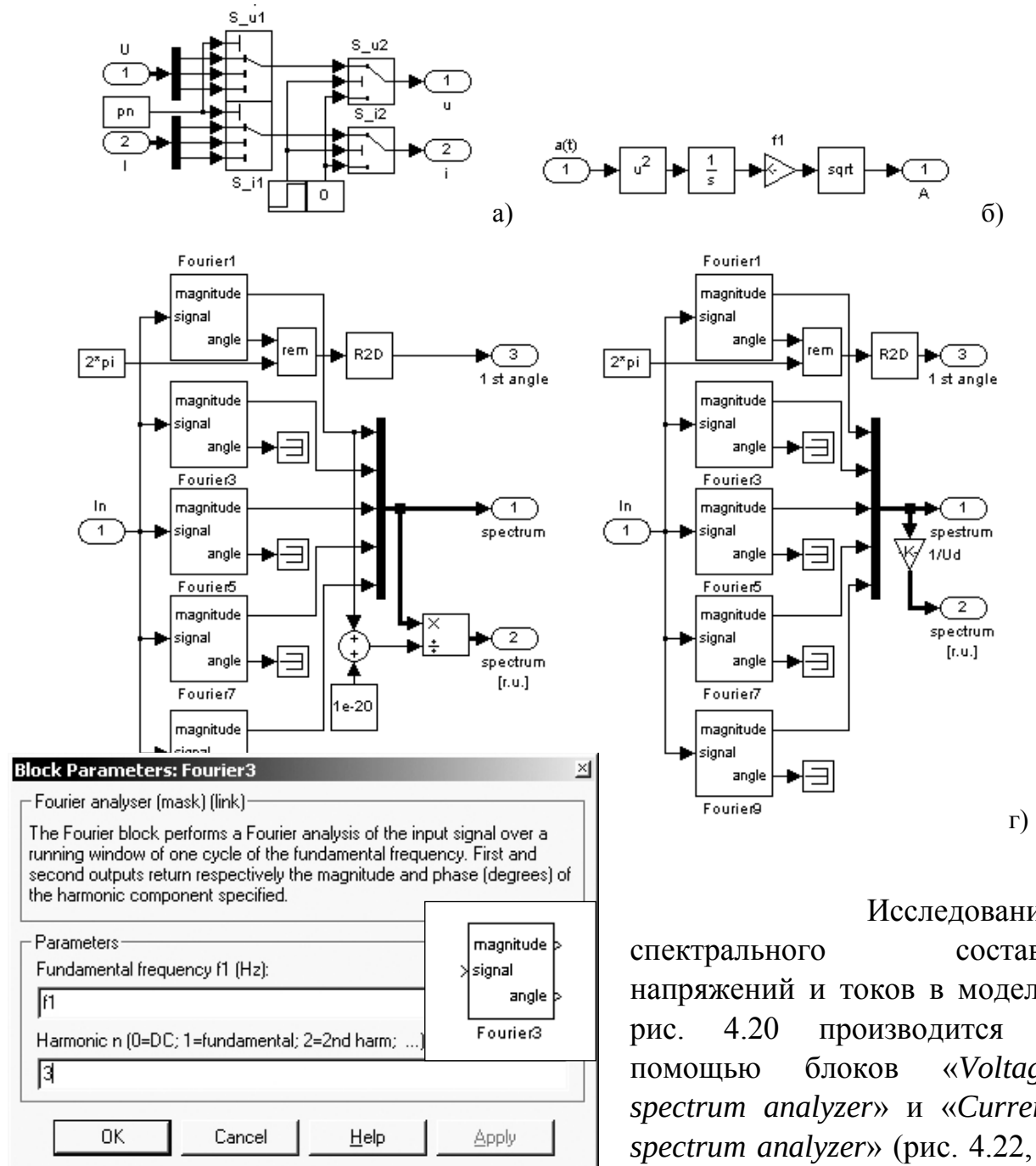


Рис. 4.23

* root-mean-square value (RMS)

элементы «*SimPowerSystems/Extra Library/Measurements/Fourier*», каждый из которых выделяет гармонику с номером, определяемым значением в окне «*Harmonic n*» (см. рис. 4.23). В данной модели исследуются нечётные гармоники до девятой включительно. В соответствии с этим каждый анализатор содержит по пять одинаковых элементов «*Fourier*», выходы «*magnitude*» которых объединены в вектор спектра амплитуд «*spectrum*». Кроме того амплитуды гармоник приводятся к относительным единицам (выход «*spectrum r.u.*»). Базовым значением для напряжений является напряжение источника питания инвертора, а для токов – амплитуда первой гармоники. Однако это значение вычисляется одновременно с остальными и до начала процесса его величина равна нулю. Поэтому для исключения ошибки деления на нуль на вход делителя вместе с сигналом амплитуды подаётся малая величина 10^{-20} .

Если по условию задачи не требуется измерение начальной фазы гармоники, то выход «*angle*» блока «*Fourier*» должен блокироваться элементом «*Simulink/Sinks/Terminator*». В данной модели анализатора спектра вычисляется начальная фаза первой гармоники. Для исключения целых периодов в величине угла вначале вычисляется остаток от деления выходного значения «*angle*» на 2π , а затем радианная мера преобразуется в градусы блоком «*Simulink Extras/Transformations/Radians to Degrees*».

Все вычисленные в модели значения выводятся в окна блоков «Simulink/Sinks/Display».

Многие задачи моделирования требуют визуализации и/или измерения входного тока инвертора. Наличие сигналов фазных токов и коммутационных функций позволяет определить эту величину.

Очевидно, что входной ток инвертора I_d равен току в фазе нагрузки, включённой последовательно по отношению к параллельному соединению двух других фаз. Тогда, пользуясь коммутационными функциями, соответствующими выражению (4.2), можно определить этот ток как

$$I_d = i_a (|s_b + s_c - s_a| > 2) + i_b (|s_a + s_c - s_b| > 2) + i_c (|s_a + s_b - s_c| > 2), \quad (4.12)$$

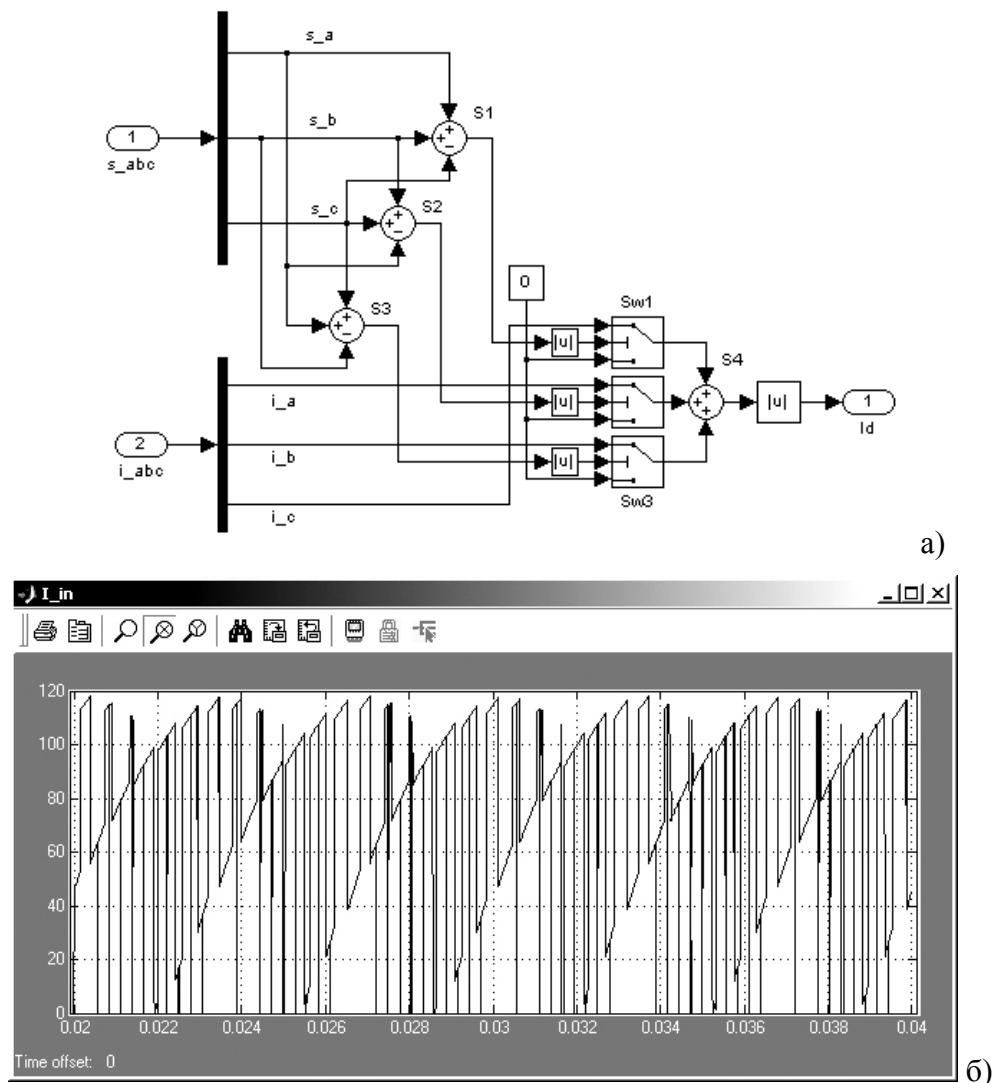


Рис. 4.24

где выражения в круглых скобках являются функциями, принимающими единичное или нулевое значение в зависимости от истинности или ложности неравенства.

Пример реализации блока вычисления входного тока инвертора в соответствии с (4.12) показан на рис. 4.24, *а*. Здесь суммирование коммутационных функций осуществляется элементами «S1»...«S3» «*Simulink/Math Operations/Sum*». После чего сигналы сумм преобразуются в абсолютные значения блоками «*Simulink/Math Operations/Abs*». Функции отношений реализованы управляемыми ключами «Sw1»...«Sw3». Сигналы фазных токов «*i_a*», «*i_b*» и «*i_c*» передаются на входы сумматора «S4», если соответствующая сумма коммутационных функций больше двух.

В качестве примера на рис. 4.24, *б* показана осциллограмма входного тока инвертора, полученная с помощью рассмотренного блока вычисления.

4.3. Управление моделью

Основным правилом, позволяющим избежать длительных и часто безрезультатных поисков ошибок при разработке модели и работе с ней, является категорический запрет на использование в настройках блоков каких-либо численных значений. Все величины должны быть определены в файле данных и использоваться только путём обращения к их именам.

На рис. 4.25, *а* приведён листинг *m*-файла данных модели рис. 4.20. Назначение переменных понятно из комментария к ним. В случае использования модели инвертора с идеальными ключами сопротивление R и индуктивность L нагрузки должны задаваться в виде векторов.

Существенное значение для моделирования имеет максимально допустимый шаг при решении уравнений переменных состояния «*mss*», который выбирается из условия получения удовлетворительных результатов на интервалах коммутации. Слишком большой шаг приводит к ошибкам в алгоритме коммутации для малых интервалов, а слишком малый – значительно увеличивает время моделирования. Причём следует учесть, что в данной модели невозможно сократить время за счёт предварительной компиляции программы, т.к. она содержит в решении алгебраические петли.

Число моделируемых периодов определяет время остановки процесса и для получения достоверных результатов в статическом режиме должно выбираться так, чтобы последний период соответствовал установившемуся режиму. Оценку этого числа можно сделать, полагая длительность переходного процесса равной трём постоянным времени цепи, т.е.

$$N \geq \text{ceil}(3Lf_1 / R).$$

Запуск модели можно производить вручную. Для этого нужно двойным щелчком на значке или имени файла модели «*sim_inverter.mdl*» запустить

```
% файл данных модели инвертора data.m
global L Lmin Lmax R Rmin Rmax Ud H nn ra pn mt N
%----- Данные модели -----
f1=50; % частота основной гармоники в Гц
R=0.5; % сопротивление нагрузки в Ом
Rmin=0.001; Rmax=1000; % диапазон фазных сопротивлений в Ом
L=0.02; % индуктивность нагрузки в Гн
Lmin=0.0001; Lmax=100; % диапазон фазных индуктивностей в Гн
Ud=200; % напряжение питания инвертора в В
H=0.1; % гистерезис регуляторов тока в А
nn=36; % кратность частоты развёртки
ra=1; % амплитуда сигнала модуляции в о.е. для линейных ШИМ (0-1) и
% ПВМ (0-0,866); 0-... в А для "токового коридора"
pn=1; % номер фазы (1,2,3), подключаемой к анализаторам гармоник
mt=1; % тип модуляции (1-ШИМ, 2-ПВМ, 3-ТК.)
%----- Данные моделирования -----
mss=1e-5; % максимальный шаг моделирования (Max step size)
N=7; % число моделируемых периодов (Stop time=N/f1)
```

а)

```
% Файл загрузки данных модели, параметров моделирования и интерфейса пользователя run.m
data;
open('sim_inverter.mdl'); % открываем модель системы
set_param('sim_inverter','Solver','ode45','StopTime','N/f1','Max step size','mss'); % устанавливаем
% метод решения дифф. уравнений (ode45); время окончания
% моделирования (N/f1); максимальный размер шага при
% решении (mss)
gui; % открываем интерфейс пользователя
```

б)

Рис. 4.25

Matlab. Затем ввести в командное окно команду «*data*» и «↵». После этого в окне «*Simulation Parameters*» настроить переменные решения (рис. 4.26), и модель готова к работе. При использовании модели инвертора с идеальными ключами алгоритм решения должен быть *ode15s*.

Операции загрузки можно выполнить автоматически, если создать *m*-файл запуска.

Листинг файла приведён на рис. 4.25, б. Для загрузки модели с помощью этого файла нужно открыть *Matlab* в папке, в которой находятся файлы «*data.m*»,

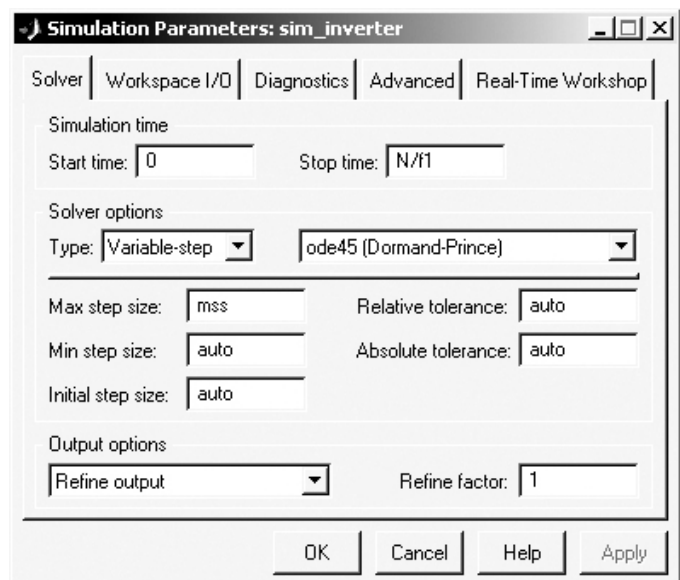


Рис. 4.26

«run.m» и «sim_inverter.mdl», после чего ввести в командное окно команду «run» и «↵».

Изменение параметров модели нужно производить в файле «data.m», а затем либо повторять команду «data» и «↵», либо пользоваться кнопкой «Run» окна редактора *m*-файлов.

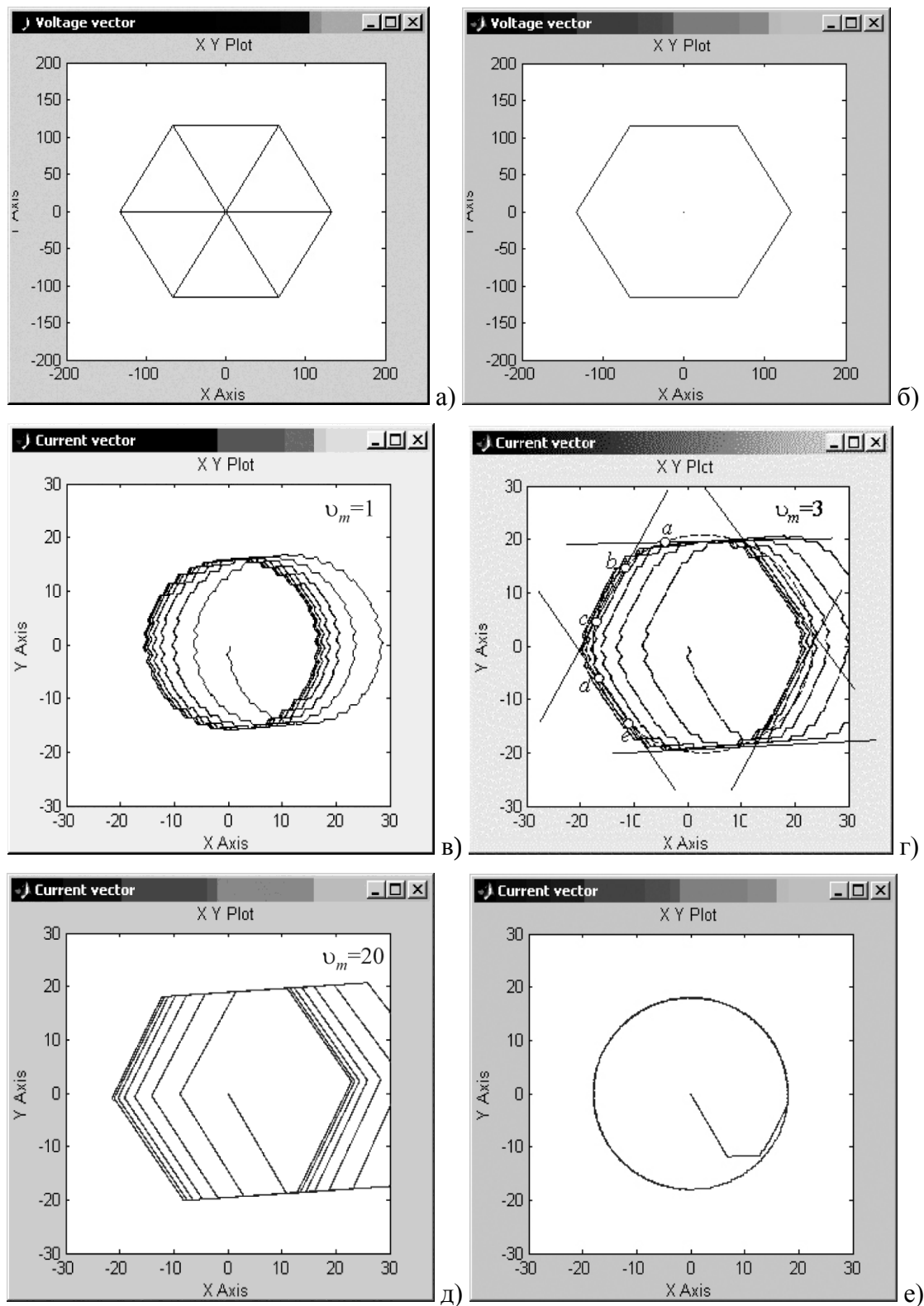


Рис. 4.27

Проще и удобнее для корректировки данных и режимов моделирования использовать графический интерфейс пользователя. Его запуск командой «*gui*» включён в файл «*run.m*». Панель интерфейса для двух типов инверторов показана на рис. 4.26. Назначение окон и кнопок понятно из их обозначений. Границы и тип данных при вводе контролируются соответствующими фильтрами. Использование интерфейса позволяет управлять моделированием не обращаясь к данным в *m*-файле и в рабочей области *Matlab*'а.

4.3. Верификация модели

Прежде чем использовать результаты моделирования необходимо убедиться в их достоверности. Для этого нужно использовать известные численные параметры, а также графические построения, получаемые при моделировании. Так, например, в случае синусоидальной модуляции при максимальной относительной амплитуде линейного режима ШИМ относительная амплитуда первой гармоники напряжения должны быть 0,5, а в режиме ПВМ – 0,577. В режиме «токового коридора» амплитуда первой гармоники тока в абсолютных значениях должна быть равна заданной амплитуде.

При симметричной нагрузке в установившемся режиме инвертор при всех способах управления должен формировать симметричные годографы. Если условие (4.10) не выполняется, то годографом вектора напряжения в любом режиме должен быть правильный шестиугольник с лучами из начала координат (рис. 4.27, а). В противном случае нулевые векторы исчезают, и годограф вырождается в правильный шестиугольник (рис. 4.27, б)

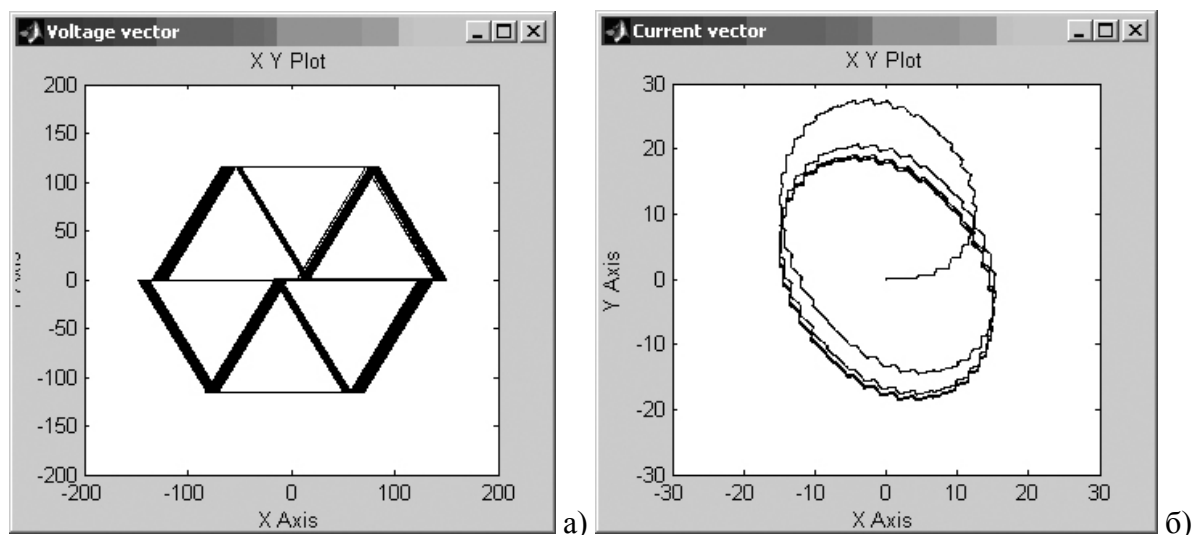


Рис. 4.28

Годограф вектора тока при ШИМ и ПВМ в среднем должен быть гладким. При симметричной нагрузке в установившемся режиме это должна быть окружность (рис. 4.27, в). По мере увеличения относительной амплитуды у

годографа должны появиться линейные участки (bc и de на рис. 4.27, $з$), и при выполнении условия (4.10) годограф вырождается в правильный шестиугольник, ось симметрии которого повернута относительно оси годографа напряжения на угол, определяемый реактансом нагрузки (рис. 4.27, $д$).

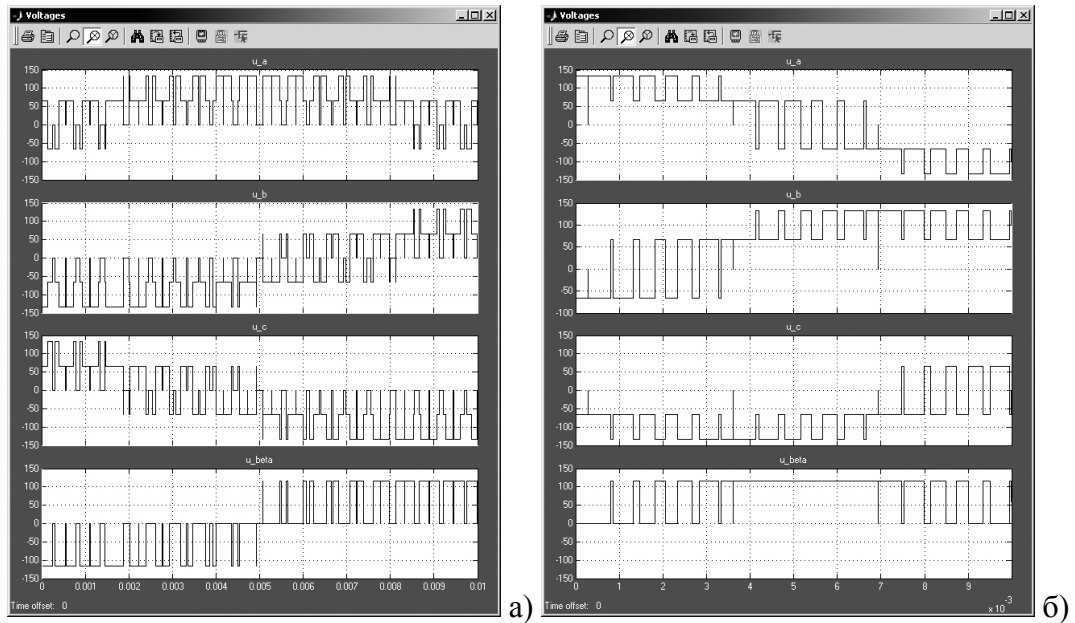


Рис. 4.29

В режиме токового коридора годограф тока должен в начале первого периода выйти на окружность установившегося режима (рис. 4.27, $е$).

При несимметричной нагрузке нарушается круговая симметрия годографов напряжения и тока (рис. 4.28)

Оценка годографов и наблюдение за их построением при моделировании являются наиболее удобным методом контроля правильности работы модели.

Кроме этого целесообразно по временным диаграммам напряжений контролировать алгоритм работы инвертора в режимах ШИМ и ПВМ. В качестве примера на рис. 4.29 показаны такие диаграммы.

5. Показатели качества энергопотребления

5.1 Составляющие полной мощности и показатели качества энергопотребления

Техническое перевооружение промышленности и выход на новые высокие технологии предполагает широкое внедрение в электрические комплексы и системы полупроводниковых преобразователей электрической энергии. Основной особенностью которых является силовое импульсное воздействие на объект регулирования определенными дозами энергии посредством модуляции того или иного вида, что при двухстороннем обмене энергией с питающей сетью, резко обостряет проблему обеспечения качества электроэнергии в аспекте нелинейных искажений токов и напряжений и общего ухудшения коэффициента мощности [1, 2].

Современные электрические комплексы и системы проектируются на базе двух подсистем: энергетической и информационной. Энергетическая подсистема включает в себя силовые цепи первичного источника питания и полупроводникового преобразователя и осуществляет двухсторонний обмен энергией между первичным источником питания и нагрузкой посредством коммутации силовых ключей. Информационная подсистема включает в себя систему управления полупроводниковым преобразователем с информационно-измерительной частью и осуществляет реализацию заданного алгоритма управления силовыми ключами преобразователя [2]. Известно [2, 3], что предельные динамические возможности систем электропитания и электропривода определяются параметрами энергетической подсистемы. Информационная подсистема не может обеспечить требуемые токи и мощности, если они не заложены в энергетической подсистеме, но принятые к реализации алгоритмы управления коммутирующим оборудованием будут определять показатели энергоэффективности электротехнического комплекса не только со стороны его нагрузки, но и со стороны первичного источника питания.

Решение задач обеспечения необходимых энергетических показателей и минимизации массогабаритных показателей энергетических подсистем сводится к определению полной мощности и её составляющих. При проектировании систем с полупроводниковыми преобразователями необходимо не только правильно учитывать и разделять все составляющие полной или кажущейся мощности, но и закладывать мероприятия по уменьшению мощностей обменного характера.

Определение энергетических характеристик электромагнитных процессов в электрических устройствах состоит из двух процедур: 1) расчета полной мощности и всех её составляющих, характерных для данного устройства; 2) нахождения определенных относительных значений соответствующих мощностей, выступающих в роли показателей (коэффициентов) качества энергопроцессов. В цепях с синусоидальными

формами напряжений и токов, с которыми практически имеет дело "большая" электроэнергетика, оба указанных энергетических множества - множество мощностей и множество показателей - четко детерминированы. Множество мощностей содержит активную, реактивную, полную мощности и мощность несимметрии в трехфазной цепи. Значительно сложнее дело обстоит в случае несинусоидальных форм напряжения и тока в электрической цепи [25].

В теории мощности в цепях с несовпадающими формами напряжения и тока выделяются два направления: спектральное (рядов Фурье) и интегральное. В рамках первого направления все мощности вычисляются через найденные представления тока и напряжения в виде рядов Фурье, дающих "тонкую" картину мощности также в виде спектра. Вычисления легко алгоритмизируемы, но являются трудоемкими по временным затратам при широкополосных спектрах и асимптотически приближенными по результатам в связи с конечностью расчетного отрезка ряда Фурье. Второе направление сводит нахождение мощностей к вычислению определенных интегралов от соответствующих композиций мгновенных напряжений и токов. Метод является аналитическим, точным, но требует наличия аналитического описания для мгновенных значений тока, что само по себе является сложной задачей в цепях рассматриваемого вида [25].

Известно [26...32], что мгновенная мощность любой энергоподсистемы различных электротехнических комплексов и систем определяется произведением мгновенных значений напряжения и тока на ее входе. Она равна скорости поступления электромагнитной энергии в данный момент времени и в общем случае изменяется в течение периода переменного тока по амплитуде и знаку.

Активная мощность P равна среднему значению мгновенной мощности за период питающего напряжения и определяет количество электромагнитной энергии, необратимо преобразующейся в другие формы энергии. Она характеризует полезную работу в нагрузке, включая полезную мощность, и мощность потерь в установке [26...32].

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) \cdot i(t) dt \quad .3)$$

(5.1)

Разложение в ряд Фурье функций входного напряжения и тока и вычисление интеграла в правой части формулы (5.1) с учетом того, что средние за период значения произведений гармонических функций с разными частотами равны нулю, приведет к формуле для активной мощности в спектральной форме:

$$P = \sum_{k=1}^n (A_{Uk} A_{Ik} + B_{Uk} B_{Ik}) ,$$

(5.2)

где $A_{Uk}, A_{Ik}, B_{Uk}, B_{Ik}$ - действующие значения косинусных и синусных составляющих в ряде Фурье напряжения и тока. Полагая, что ЭДС первичного

источника питания изменяется строго по гармоническому закону и не содержит высших гармоник, формула (5.2) преобразуется к известному виду [27...32]:

$$P = U_1 I_{1a}, \quad (5.3)$$

где U_1 , I_{1a} - действующие значения напряжения и активной составляющей основной (первой) гармоники тока источника питания.

КПД любой энергоподсистемы, характеризующий потери активной составляющей полной или кажущейся мощности S , определяется как отношение активной мощности P_L , отдаваемой в нагрузку, к потребляемой активной мощности от сети P [26...32]:

$$\eta = \frac{P_L}{P}. \quad (5.4)$$

Полная, или кажущаяся, мощность S всегда больше фактически передаваемой нагрузке активной мощности из-за существования её неактивных составляющих, которые, не создавая полезного эффекта, приводят в то же время к увеличению потерь в питающей сети [27...36]. Известны три неактивные составляющие полной мощности [27...36]: реактивная мощность или мощность сдвига Q , мощность искажения T и мощность несимметрии H .

Реактивная мощность, или мощность сдвига Q , обусловлена сдвигом по фазе основной гармоники тока относительно напряжения питающей сети. Вследствие сдвига основной гармоники тока появляется реактивная составляющая тока, которая не участвует в передаче активной мощности нагрузке, так как среднее значение мгновенной мощности за период питающего напряжения, обусловленное этой составляющей тока, равно нулю. Реактивная мощность может быть выражена, используя преобразование Гильберта, согласно работе [34]:

$$Q = -\frac{1}{T} \int_0^T i(t) H\{u(t)\} dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) H\{i(t)\} dt, \quad (5.5)$$

$$H\{f(t)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau. \quad (5.6)$$

Учитывая, что при преобразовании Гильберта изображение синусоидальной функции равно производной этой функции деленной на величину угловой частоты источника ω_H , мы придём к выражению вида:

$$Q = \sum_{k=1}^n (A_{Uk} B_{Ik} - B_{Uk} A_{Ik}). \quad (5.7)$$

ЭДС первичного источника питания изменяется по гармоническому закону и не содержит высших гармоник, поэтому:

$$Q = U_1 I_{1p},$$

(5.8)

где I_{1p} - действующее значение реактивной составляющей основной (первой) гармоники тока источника питания.

Мощность искажения T обусловлена высшими гармониками тока. Среднее значение мгновенной мощности, связанной с этими гармониками, за период питающего напряжения также равно нулю, однако и они вызывают дополнительные потери энергии в сети.

Мощность несимметрии H учитывает дополнительные потери энергии, связанные с неравномерным распределением тока по фазам многофазной цепи. В симметричных полупроводниковых преобразователях мощность несимметрии в установившемся режиме равна нулю [29]. В переходных режимах работы энергоподсистемы даже при симметричной нагрузке из-за неравномерного распределения тока по фазам (например, при заряде емкостной нагрузки) в полную мощность может вносить вклад мощность несимметрии.

В общем случае полная мощность связана со своими составляющими известным выражением [31] вида:

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2 + H^2},$$

(5.9)

где U , I – действующие значения напряжения и тока источника питания. В симметричном преобразователе полная мощность связана со своими составляющими соотношением [27...36]:

$$S = U \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2 + T^2},$$

(5.10)

Мощность искажения T может быть определена из формулы (5.10):

$$T = \sqrt{S^2 - (P^2 + Q^2)}$$

(5.11)

Определив полную мощность энергоподсистемы S и ее составляющие P , Q и T можно определить основные показатели качества энергопотребления [31]: χ – коэффициент мощности, $\cos \varphi_{(1)}$ – коэффициент сдвига, K_D – коэффициент искажения, K_H – коэффициент гармоник.

Коэффициент мощности электротехнического комплекса характеризует способность этого комплекса потреблять электрическую энергию источника питания.

$$\chi = \frac{P}{S}$$

(5.12)

Коэффициент сдвига характеризует обмен энергией между приемником и источником, обусловленный способностью реактивных элементов электротехнического комплекса накапливать и отдавать энергию.

$$\cos \varphi_{(1)} = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \quad (5.13)$$

Коэффициент искажения характеризует обмен энергией между источником и приемником, обусловленный высшими гармоническими составляющими тока.

$$K_D = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{\sqrt{P^2 + Q^2 + T^2}} \quad (5.14)$$

Коэффициент гармоник (коэффициент искажения синусоидальности кривой тока согласно ГОСТ Р 51317.3.2-99 или интегральный показатель гармонического состава тока (*Total Harmonic Distortion*) согласно международному стандарту IEEE 519) характеризует соотношение между энергией, обусловленной высшими гармониками тока, и энергией обусловленной основной (первой) гармоникой.

$$K_H = \frac{T}{\sqrt{P^2 + Q^2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{K_D}\right)^2 - 1} \quad (5.15)$$

При известном спектральном составе коэффициент гармоник определяется согласно выражению:

$$K_H = \frac{\sqrt{\sum_{k=2}^N (I_k)^2}}{I_1} \quad (5.16)$$

Учитывая выражения (5.3), (5.8) и (5.15), мощность искажения T может быть также определена [31]:

$$T = K_H \sqrt{P^2 + Q^2} = K_H U_1 \sqrt{I_{1a}^2 + I_{1p}^2} = K_H U_1 I_1. \quad (5.17)$$

На сегодняшний день международные стандарты качества энергопотребления и электромагнитной совместимости технических средств, такие как IEEE 519 и МЭК 61000-3-4-98, предъявляют жесткие требования к значениям гармонических составляющих потребляемого электротехническим устройством тока вплоть до 49 гармоники – таблица 1 [19, 20], а отечественный ГОСТ Р 51317.3.2-99 (МЭК 61000-3-2-95) до 40-й [15]. Допустимое значение коэффициента гармоник K_{THD} , а также коэффициентов пульсаций тока отдельных гармоник, зависит от соотношения мощности системы электроснабжения и нагрузки. К гармоническому составу тока

потребителя предъявляются требования в зависимости от его величины (ГОСТ Р 51317.3.2-99) и соотношения к току короткого замыкания источника (таблица 5.1) [19, 20].

Таблица 5.1

Предельно допустимые значения по ГОСТ Р 51317.3.2-99

$\frac{I_{K3}}{I_H}$	Максимально допустимый коэффициент пульсаций тока k – й гармоники					K_H
	$k < 11$	$11 \leq k < 17$	$17 \leq k < 23$	$23 \leq k < 35$	$35 \leq k$	
< 20	0,040	0,020	0,015	0,006	0,003	0,050
$20 - 50$	0,070	0,070	0,025	0,010	0,005	0,080
$50 - 100$	0,100	0,100	0,040	0,015	0,007	0,120
$100 - 1000$	0,120	0,120	0,050	0,020	0,010	0,150
> 1000	0,150	0,150	0,060	0,025	0,014	0,200

Коэффициент несимметрии характеризует степень несимметрии нагрузки и определяется из равенства:

$$K_s = \frac{\sqrt{(P^2 + Q^2 + T^2)}}{S} \quad (5.18)$$

В симметричной системе этот коэффициент равен единице. Известно [27...32], что в симметричной трехфазной системе синусоидальных напряжений с симметричной (равномерной) нагрузкой фаз полная мощность и ее составляющие определяются выражениями:

$$S_3 = 3U_{\phi} I_{\phi}$$

$$(5.19),$$

$$P_3 = 3P_{\phi}$$

$$(5.20),$$

$$Q_3 = 3Q_{\phi}$$

$$(5.21),$$

где U_{ϕ} - действующее значение напряжения фазы, I_{ϕ} - действующее значение тока фазы. При равномерной нагрузке независимо от способа ее соединения (звездой или треугольником) [27...32]:

$$3U_{\phi} I_{\phi} = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}, \quad (5.22)$$

где $U_{\text{л}}$ - действующее значение линейного напряжения, $I_{\text{л}}$ - действующее значение линейного тока. Поэтому вместо формулы (5.19) часто используют [27...32] следующую:

$$S_3 = \sqrt{3} U_{\text{л}} I_{\text{л}}. \quad (5.23)$$

Известно [32], что при симметричном режиме реактивную мощность можно измерить одним ваттметром:

$$Q_3 = \sqrt{3} P_w \quad (5.24)$$

В трехфазной системе без нейтрального провода с симметричной системой напряжений и с несимметричной нагрузкой фаз полная мощность и две ее неактивные составляющие определяются выражениями [31]:

$$S_3 = U_{\dot{E}} \sqrt{I_{\dot{E}A}^2 + I_{\dot{E}B}^2 + I_{\dot{E}C}^2}, \quad (5.25)$$

$$T_3 = U_{\dot{E}} \sqrt{I_{\dot{E}A}^2 + I_{\dot{E}B}^2 + I_{\dot{E}C}^2 - (I_{\dot{E}A1}^2 + I_{\dot{E}B1}^2 + I_{\dot{E}C1}^2)}, \quad (5.26)$$

$$H_3 = \sqrt{S_3^2 - (P_3^2 + Q_3^2 + T_3^2)}, \quad (5.27)$$

где $I_{\dot{E}A}$, $I_{\dot{E}B}$, $I_{\dot{E}C}$ - действующие значения линейных токов, $I_{\dot{E}A1}$, $I_{\dot{E}B1}$, $I_{\dot{E}C1}$ - действующие значения первых гармоник линейных токов.

Для измерения активной мощности трехфазной системы в общем случае (неравномерная нагрузка и наличие нулевого провода) необходимо включить три ваттметра. Для измерения активной и реактивной мощностей в трехфазной системе без нейтрального провода как при симметричном, так и при несимметричном режимах эффективнее всего использовать способ двух ваттметров [32], для измерения реактивной мощности можно использовать два варметра. Сумма показаний двух ваттметров (варметров) при этом определяет активную (реактивную) мощность всей системы независимо от того звездой или треугольником соединена нагрузка.

Для общего случая энергопроцессов с искаженными формами напряжений и токов учесть отдельно вклад несинусоидальности напряжения в мощность искажения затруднительно [31]. Оценить с достаточной степенью точности мощность искажения можно, учитывая общий возможный небаланс системы напряжений, полагая при этом сами напряжения синусоидальными. Тогда мощность искажения обусловлена только несинусоидальностью системы токов и приходим к системе выражений вида:

$$S_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{U_{AB}^2 + U_{AC}^2 + U_{NA}^2} \sqrt{I_{\dot{E}A}^2 + I_{\dot{E}B}^2 + I_{\dot{E}C}^2}, \quad (5.28)$$

$$T_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{U_{AB}^2 + U_{AC}^2 + U_{NA}^2} \sqrt{I_{\dot{E}A}^2 + I_{\dot{E}B}^2 + I_{\dot{E}C}^2 - (I_{\dot{E}A1}^2 + I_{\dot{E}B1}^2 + I_{\dot{E}C1}^2)}, \quad (5.29)$$

$$H_3 = \sqrt{S_3^2 - (P_3^2 + Q_3^2 + T_3^2)}. \quad (5.30)$$

Если же действующие значения линейных напряжений в данном режиме отличаются незначительно, то от формул (5.28) и (5.29) снова придем к выражениям вида (5.25) и (5.26).

Меньшая трудоемкость вычисления мощностей в интегральном методе является, как принято считать, главным стимулом его применения для расчета энергопроцессов в цепях с резко несинусоидальными формами напряжения и

тока, характерными для устройств преобразовательной техники [25]. Определение составляющих полной мощности на основе разложения на гармоники является сложной и трудоемкой операцией [34]. Однако требования как международных стандартов IEEE 519, МЭК 61000-3-4-98, так и отечественного ГОСТ Р 51317.3.2-99 **жёстко регламентируют уровень гармонических составляющих потребляемого электротехническим устройством тока. Таким образом, перспективность использования метода гармонического анализа очевидна, и его целесообразно применять при исследовании.** При этом порядок учитываемых гармоник можно ограничить на уровне требований ГОСТ, что позволяет алгоритмизировать спектральный метод расчета.

Моделирование энергетических подсистем электротехнических комплексов и систем с полупроводниковыми преобразователями может производиться:

1. По аналитическим выражениям или с привлечением методов расчета электрических цепей с дискретно изменяющимися параметрами [37], в том числе метода пространства состояний и базиса коммутационных разрывных функций, в современных интегрированных пакетах математического программирования *MathCAD*, *MATLAB*;
2. На схематехнических моделях в пакетах *OrCAD/PSpice*, *WorkBench*;
3. На структурно-имитационных моделях в пакете *MATLAB/Simulink* с применением приложения *SymPower Systems*;

Для моделирования энергетической подсистемы с привлечением метода пространства состояний необходима ее полная математическая модель, т.е. система дифференциальных уравнений, полностью описывающая процессы в ней. В связи с тем, что современные электротехнические устройства являются сложными многомерными и нелинейными объектами, составление их полной математической модели зачастую затруднительно. Также при моделировании электротехнических устройств с замкнутой системой управления и регулирования необходимо дополнительно учитывать алгоритмы работы информационной подсистемы. На систему управления помимо основных задач регулирования и управления, могут быть возложены задачи защиты, диагностики и выдачи информации о состоянии энергетической подсистемы. В этом случае систему управления эффективно проектировать на базе микроконтроллера. На микроконтроллере возможна реализация цифровых фильтров и цифровых регуляторов. Однако при реализации цифровых фильтров и регуляторов необходимо учитывать ошибки, возникающие вследствие конечной разрядности АЦП и конечной разрядности операционного устройства, приводящие к округлению результатов арифметических операций. Для оценки величины ошибки, возникающей в реальных дискретных системах управления, эффективным способом является моделирование системы с учетом алгоритма регулирования, реализованного на микроконтроллере с сохранением той же последовательности и разрядности вычислений. Поэтому довольно часто моделирование ЭП

производится на схемотехнических моделях (*OrCAD*, *WorkBench*) или на структурно-имитационных моделях (*MATLAB/Simulink*).

Пакет *MATLAB* является в настоящее время наиболее эффективным инструментом в решении не только задач моделирования, но и комплексного исследования процессов в устройствах силовой электроники при различных режимах работы [38...40]. Отмечалось, что результатом незавершенности теории энергетических процессов в вентильных преобразователях стала ситуация, когда устройство преобразования электрической энергии не может быть непосредственно охарактеризовано энергетическими соотношениями общего вида, что обычно необходимо на этапе проектирования, а должно быть подвергнуто трудоемкому расчету во временной и частотной областях [25]. Пакет *MATLAB/Simulink* с приложением *SymPower Systems* позволяет при исследовании электромагнитных и энергетических процессов в ЭП использовать как интегральный метод определения их энергетических показателей, так и спектральный метод расчета. Таким образом, пакет позволяет быстро и эффективно решить задачу нахождения составляющих полной мощности энергоподсистемы [41...43].

Для анализа гармонического состава токов и напряжений схем в пакете используется стандартный блок *Powergui*. При моделировании в пакете *MATLAB/Simulink* с использованием *SimPowerSystems* электромагнитных процессов в энергоподсистеме содержащей трансформатор, важное значение имеет правильное определение параметров его схемы замещения. В *SimPowerSystems* используется Т – образная схема замещения трансформатора, параметры которой следует определять исходя из паспортных данных трансформатора. По паспортным данным, режимам короткого замыкания и холостого хода трансформатора рассчитываются параметры его реальной и приведенной схем, а также параметры намагничивающего контура [39, 44].

5.2. Модели измерительных схем полной мощности и её составляющих

В пакете *MATLAB/Simulink* с применением приложения *SymPower Systems* разработан ряд моделей ЭП, измерительных схем полной мощности и её составляющих для однофазных (рис. 5.1), трехфазных симметричных и несимметричных ЭП, вычислитель показателей качества энергопотребления ЭП [41...43].

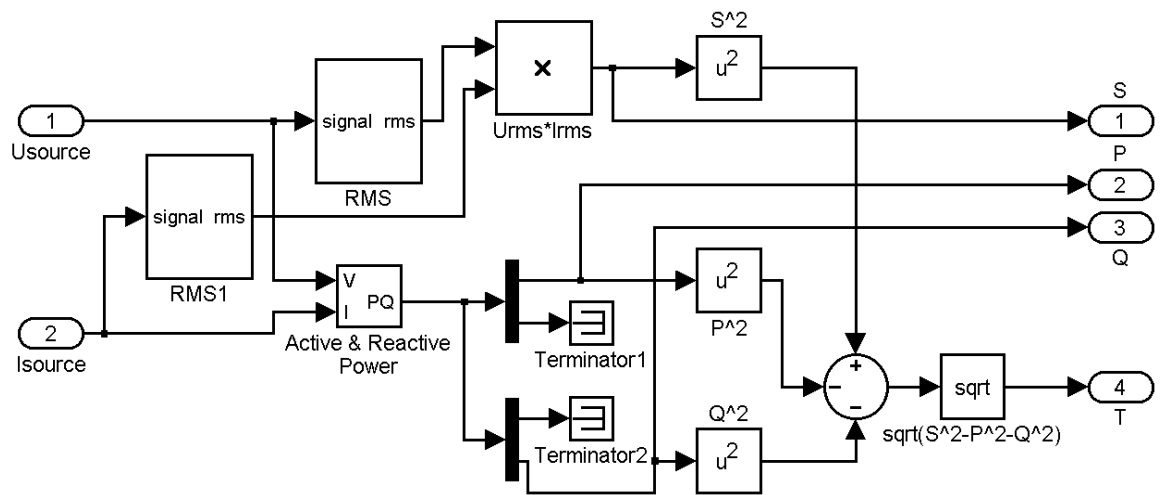


Рис. 5.1

Для измерения активной и реактивной мощностей в трехфазной системе без нейтрального провода как при симметричном, так и при несимметричном режимах эффективнее всего использовать способ двух ваттметров [32], для измерения реактивной мощности можно использовать два варметра. Сумма показаний двух ваттметров (варметров) при этом определяет активную (реактивную) мощность всей системы независимо от того звездой или треугольником соединена нагрузка. В соответствии с указанным способом в пакете *MATLAB/Simulink* была разработана измерительная схема [42] активной и реактивной мощностей трехфазных трехпроводных энергоподсистем (рис. 5.2). Для измерения активной и реактивной мощности в схеме используется стандартный блок *Active&Reactive Power*, входящий в библиотеку *SimPowerSystems/ExtraLibrary/Measurements*.

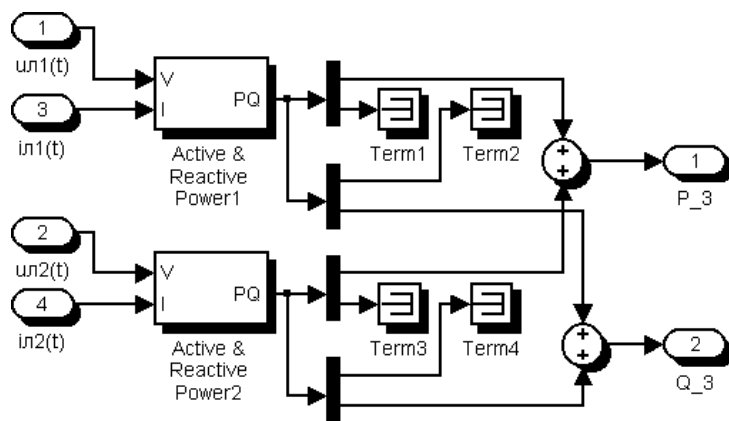


Рис. 5.2

Для измерения полной мощности и мощности искажения трехфазной симметричной системы разработана измерительная схема *Symmetric Three-Phase Power Measurement* (рис. 5.3), в соответствии с формулами (5.11) и (5.23) [42].

Измерительные схемы (рис. 5.2) и (рис. 5.3) могут применяться независимо от

способа соединения нагрузки, так на рис. 5.4 приведен пример трехфазной симметричной системы (схема соединений звезда-звезда). При моделировании использовались параметры силового трансформатора серии ТСЗ, ТСЗН номинальной мощностью 25 кВА. Остальные числовые параметры при моделировании были взяты следующими: действующее значение линейного напряжения источника $U_L = 6,3$ (кВ), частота питающей сети 50

(Гц), действующее значение линейного напряжения на вторичной стороне трансформатора $U_{2Л} = 0,38$ (кВ), сопротивление нагрузки в каждой фазе 8 (Ом).

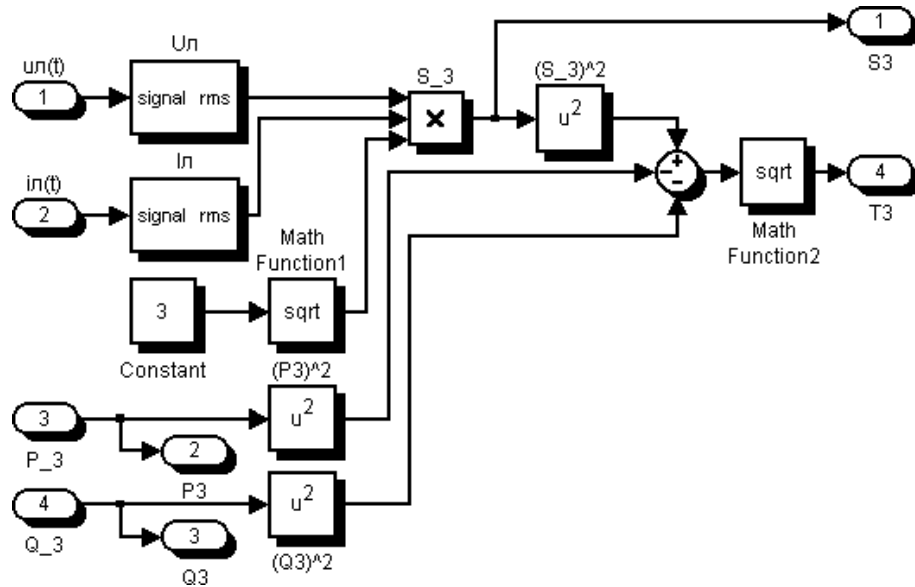


Рис. 5.3

Среди стандартных блоков приложения *SimPowerSystems* библиотеки *Extra Library* имеются блоки *Discrete 3-phase Total Power* и *Discrete 3-phase Positive-Sequence Active&Reactive Power*, измеряющие составляющие

полной мощности в трехфазной системе. Из полученных при моделировании результатов (*Display* и *Display2* на рис. 5.4) видно, что величины составляющих полной мощности, измеренные разработанной схемой и стандартными блоками, полностью совпадают в квазиустановившемся режиме. Это позволяет сделать вывод о том, что данная измерительная схема может применяться наравне с использующимися в пакете.

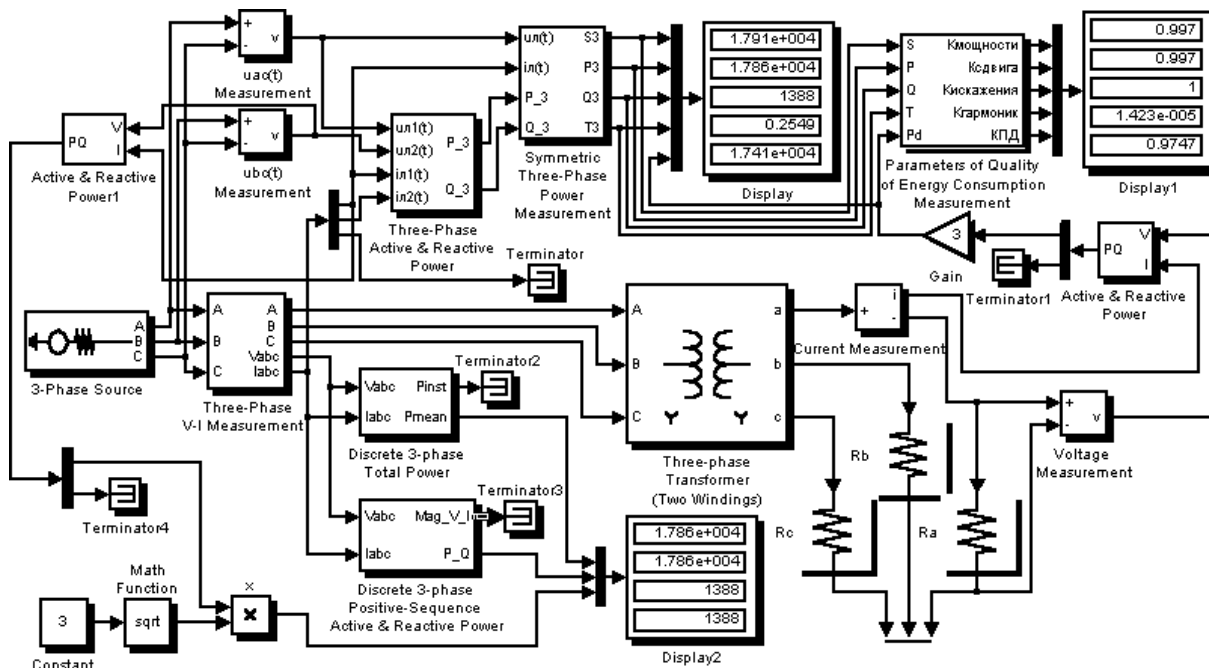


Рис. 5.4

Известно [32], что при симметричном режиме реактивную мощность можно измерить одним ваттметром. Величина реактивной мощности,

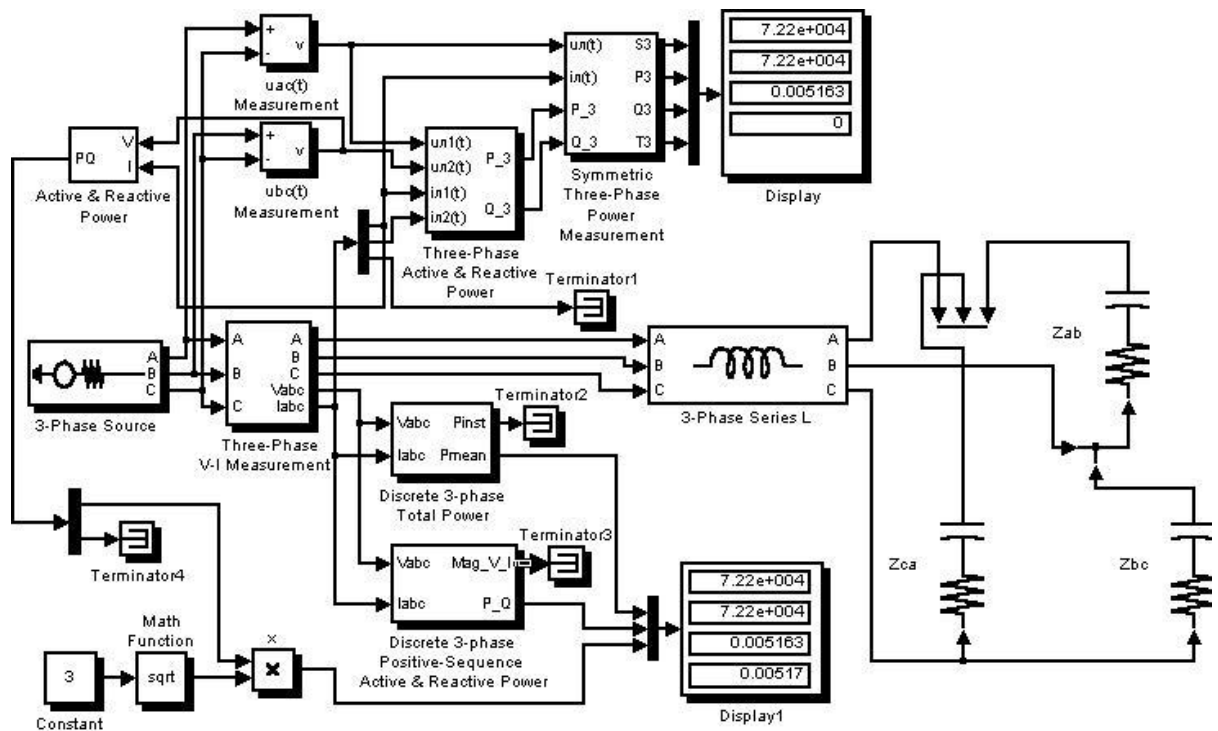


Рис. 5.5

измеренная с использованием стандартных блоков по формуле (5.24), также совпадает в квазиустановившемся режиме с величинами, полученными другими способами (*Display2* на рис. 5.4).

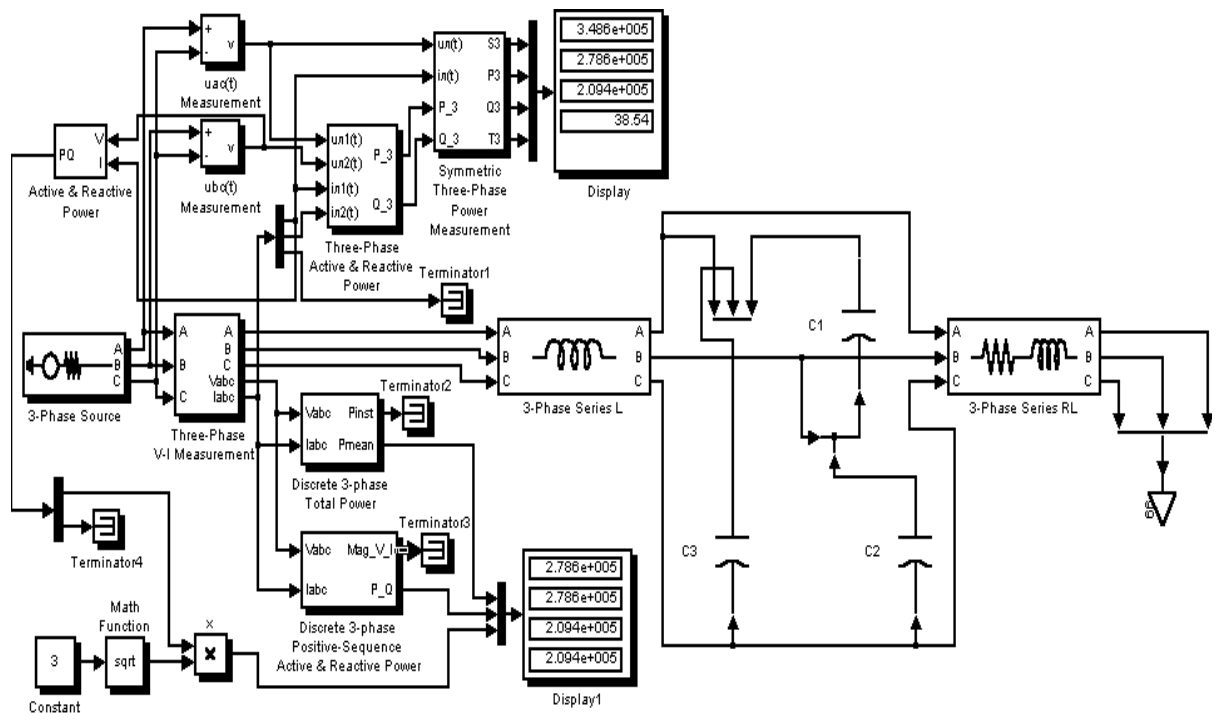


Рис. 5.6

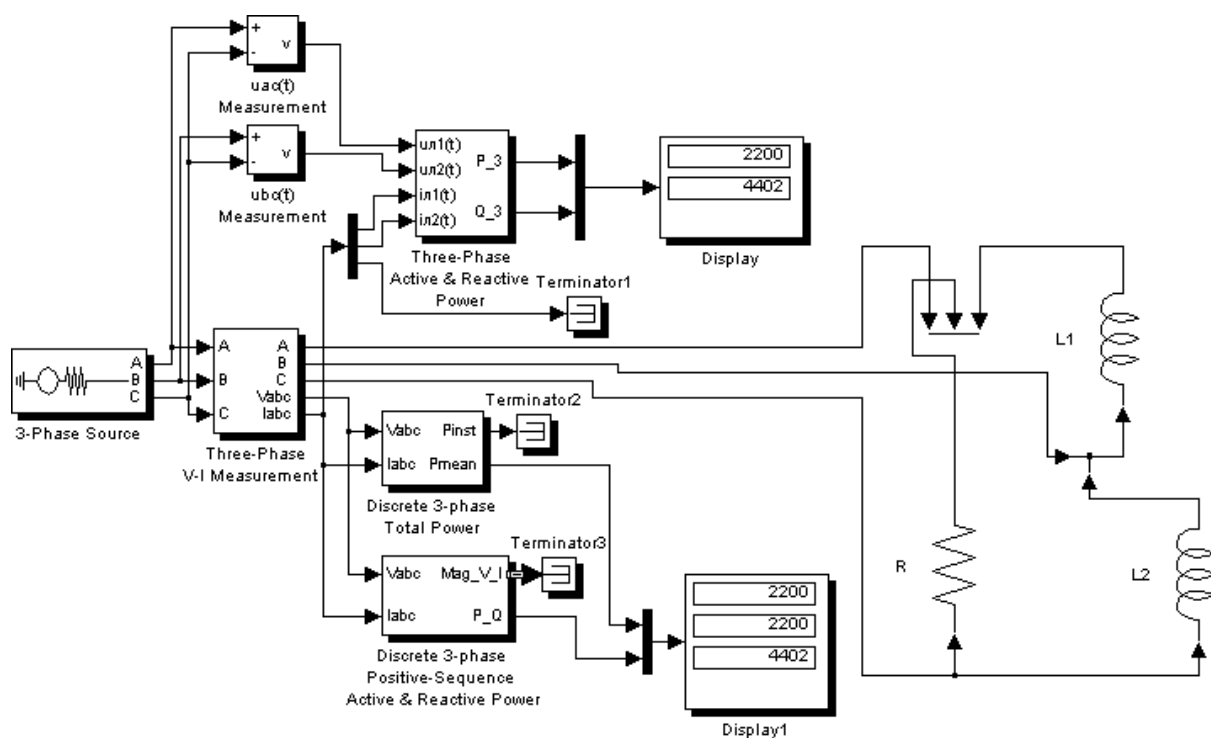


Рис. 5.7

Верификация используемого подхода производилась на моделях путем сравнения результатов моделирования с данными задач приведенных в

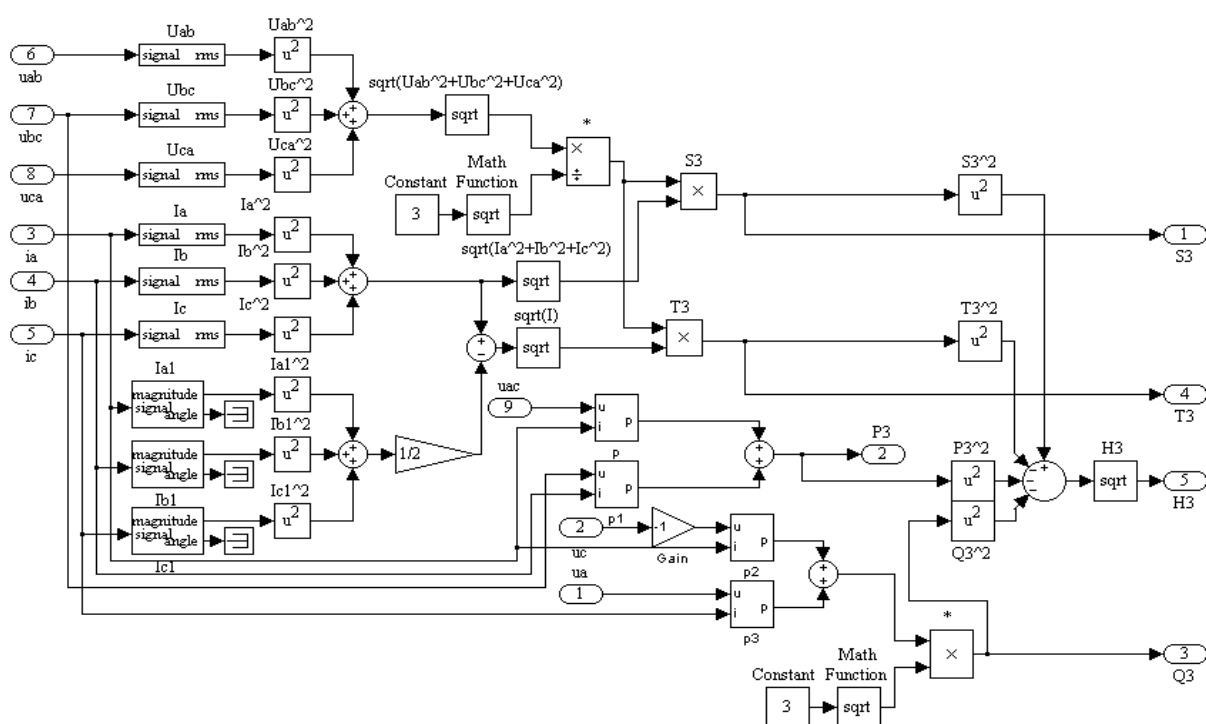


Рис. 5.8

литературе [32, 45] и показала достоверность получаемых результатов. Так на рис. 5.5 приведен пример из [45], согласно данным задачи: $U_{\text{л}} = 0,38$ (кВ), $\omega L = 2$ (Ом), $r = 1/\omega C = 6$ (Ом), активная мощность системы составляет 72,6 (кВт), реактивная мощность системы равна нулю. Действительно, преобразовав в

эквивалентную звезду группу элементов нагрузки соединенных в треугольник, получим, что суммарное реактивное сопротивление каждой из фаз равно нулю.

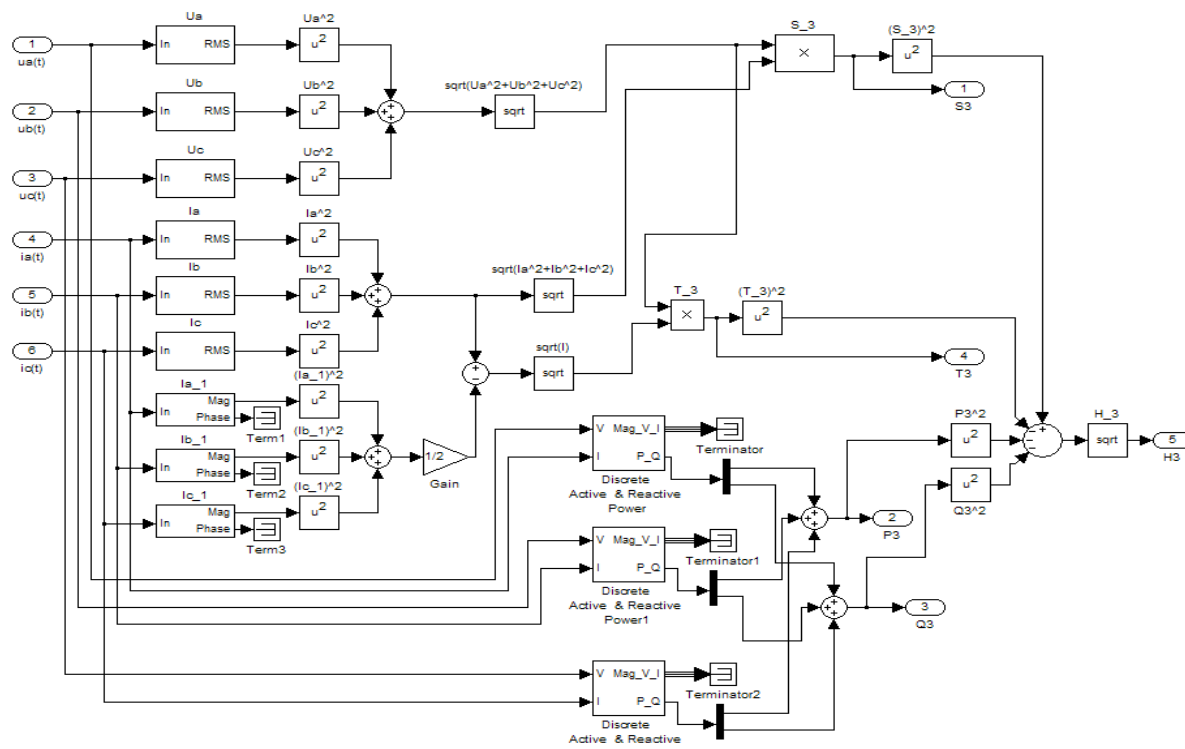


Рис. 5.9

Пример 2: Трехфазная система с активно-реактивной нагрузкой: $U_{\text{л}} = 6,6$ (кВ), $\omega L = 75$ (Ом), $r = \omega L' = 50$ (Ом), $1/\omega C = 300$ (Ом), активная мощность системы составляет 280 кВт, реактивная 210 кВар (рис. 5.6).

Пример 3: Трехфазная система с активно-реактивной нагрузкой: $U_{\text{л}} = 220$ (В), $r = \omega L = 22$ (Ом), реактивная мощность системы составляет 4400 вар (рис. 5.7).

Относительная погрешность измерений на моделях не превышает 4%.

Для определения полной мощности и ее составляющих энергоподсистем при питании от трехфазной трехпроводной сети (без нейтрального провода) с симметричной системой напряжений и несинусоидальной системой токов разработана измерительная схема (рис. 5.8), в соответствии с (5.28) – (5.30). Для определения полной мощности и ее составляющих энергоподсистем при питании от трехфазной четырехпроводной сети (с нейтральным проводом) с несимметричной системой напряжений и несинусоидальной системой токов приведена измерительная схема (рис. 5.9). В них действующие значения первых гармоник линейных токов определяются стандартными блоками *Fourier* приложения *SimPowerSystems*, позволяющими выделить из спектра необходимую гармонику. Для измерения активной и реактивной мощностей в схеме (рис. 5.8) используется способ двух ваттметров, который подходит только для энергоподсистем с симметричной системой напряжений.

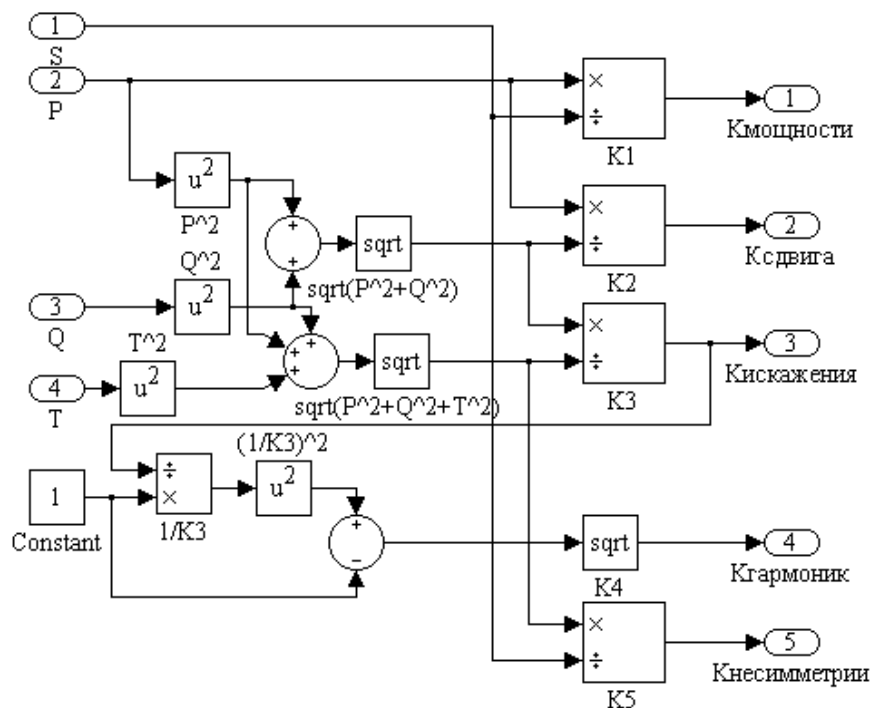


Рис. 5.10

энергопотребления энергоподсистем (рис. 5.10) осуществляет их расчет по известным значениям S , P , Q , T .

В целом, сравнение результатов моделирования энергоподсистем по аналитическим выражениям и с привлечением метода пространства состояний в пакете *MathCAD*, а также на схмотехнических моделях в пакете *OrCAD/PSpice* и на структурно-имитационных моделях в пакете *MATLAB*, показывает, что относительная погрешность расчетов определяется выбранным шагом интегрирования и численным методом расчета. Высокая погрешность расчета характерна для энергоподсистем с большими постоянными времени цепи источника и (или) нагрузки (на два и более порядка относительно периода питающей сети). Для моделирования переходных процессов в таких ЭП требуется значительное машинное время, уменьшение которого до приемлемого сопровождается увеличением шага интегрирования и, соответственно, снижением точности, а также устойчивости применяемого метода расчета [37].

Задачи совершенствования энергетических показателей электротехнических комплексов и систем с полупроводниковыми преобразователями напрямую связаны с вопросами определения составляющих полной мощности ЭП, которые решены не в полной мере на сегодняшний день. Для современного этапа развития теории энергетических процессов в вентильных преобразователях характерна ситуация, когда устройства преобразования электрической энергии не могут быть описаны энергетическими соотношениями общего вида. Отсутствие таких соотношений не позволяет оперативно оценить энергетические показатели проектируемых устройств, что вынуждает проводить трудоемкие расчеты

энергетических показателей во временной и частотной областях. В теории мощности в цепях с несовпадающими формами напряжения и тока выделяются два направления: спектральное (рядов Фурье) и интегральное. Требования как международных стандартов IEEE 519, МЭК 61000-3-4-98, так и отечественного ГОСТ Р 51317.3.2-99 жестко регламентируют уровень гармонических составляющих потребляемого электротехническим устройством тока. Таким образом, перспективность использования метода гармонического анализа очевидна и его следует взять за базовый метод исследований.

6. Энергоэффективность алгоритмов ШИМ

Несмотря на наличие значительного числа публикаций [3, 4, 5, 6 и др.], посвященных анализу энергетических показателей полупроводниковых преобразователей (коэффициент мощности, коэффициент нелинейных искажений, коэффициент гармоник, коэффициент полезного действия), задача выбора наиболее эффективного в энергетическом отношении закона управления ими остается актуальной. Причем, большинство публикаций в основном посвящены анализу энергетических показателей на выходе энергоподсистем инверторов, в то время как при их проектировании, крайне важно обладать информацией и об энергетических показателях на входе – со стороны первичного источника питания при различных видах модуляции и законах управления силовыми ключами.

Известно, что импульсное регулирование само по себе вызывает искажение потока энергии, характер и величина которого зависит от алгоритма коммутации ключей преобразователя. В настоящее время в преобразователях частоты для управления трёхфазным инвертором используют в основном два вида алгоритмов широтно-импульсной модуляции (ШИМ):

1) двухполярную двухстороннюю синусоидальную ШИМ и

2) симметричную (центрированную) пространственно-векторную ШИМ с использованием двух соседних ненулевых и одного нулевого вектора на периоде модуляции (далее ПВМ). Поскольку коммутационные функции ключей инвертора в первом случае математически описываются без использования понятия пространственных векторов инвертора, этот вид модуляции можно назвать скалярной ШИМ. В дальнейшем этот алгоритм управления ключами инвертора мы будем обозначать просто ШИМ, в отличие второго алгоритма, обозначаемого ПВМ.

Для исключения влияния иных факторов кроме собственно алгоритма управления ключи инвертора следует считать идеальными, а источник питания, обладающим бесконечной мощностью ($U_d = \text{const}$).

Корректное сопоставление характеристик алгоритмов возможно, только если моделирование проводить при одинаковой активной мощности нагрузки. Но синусоидальная ШИМ в линейной области регулирования глубины модуляции не может обеспечить амплитуду первой гармоники выходного напряжения, равную амплитуде при ПВМ. Поэтому необходимо использовать т.н. предмодуляцию, т.е. включение в сигнал модуляции третьей гармоники с нулевой начальной фазой и амплитудой, равной 1/6 амплитуды первой гармоники (далее ШИМ)¹. Это

¹ см. раздел 3.3.2.1

позволяет выровнять диапазоны линейного регулирования напряжения обоих алгоритмов.

Преобразователи частоты со звеном постоянного тока обычно используются в качестве источников питания двигателей переменного тока. Однако моделирование преобразователя с нагрузкой, обладающей изменяющимся в широком диапазоне импедансом, величина которого зависит не только от режима работы машины, но также от её мощности и конструктивных особенностей даже в пределах одной серии, не позволяет обобщить результаты исследования. Бóльшую общность обеспечивает использование в качестве модели RL нагрузки с $0,1 \leq \cos \varphi_{RL} \leq 0,9999$, что превосходит диапазон изменения этого параметра при эксплуатации, например, асинхронного двигателя.

Спектральный состав токов на входе и выходе инвертора зависит от соотношения длительностей периода основной гармоники $T_1 = 1/f_1$ и электромагнитной постоянной времени нагрузки

$$T_{RL} = \frac{L}{R} = \frac{X_L}{\omega_1 R} = \frac{X_L}{2\pi f_1 R}. \quad (6.1)$$

Если моделирование выполнить при условии $Z_{RL} = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \text{const}$, а $\cos \varphi_{RL} = \text{var}$, то

$$T_{RL} = \frac{X_L}{2\pi f_1 R} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{RL}}}{2\pi f_1 \cos \varphi_{RL}}. \quad (6.2)$$

Тогда соотношение

$$1,58 \Big|_{\cos \varphi_{RL}=0,1} > \frac{T_{RL}}{T_1} = \tau = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \varphi_{RL}}}{2\pi \cos \varphi_{RL}} > 0 \Big|_{\cos \varphi_{RL} \rightarrow 1} \quad (6.3)$$

будет зависеть только от $\cos \varphi_{RL}$, т.е. вариация этого параметра эквивалентна вариации электромагнитной постоянной времени T_{RL} (см. рис. 6.1).

Очевидно, что спектр токов зависит также от глубины модуляции

$$\gamma = u_m^* / u_{sm}, \quad (6.4)$$

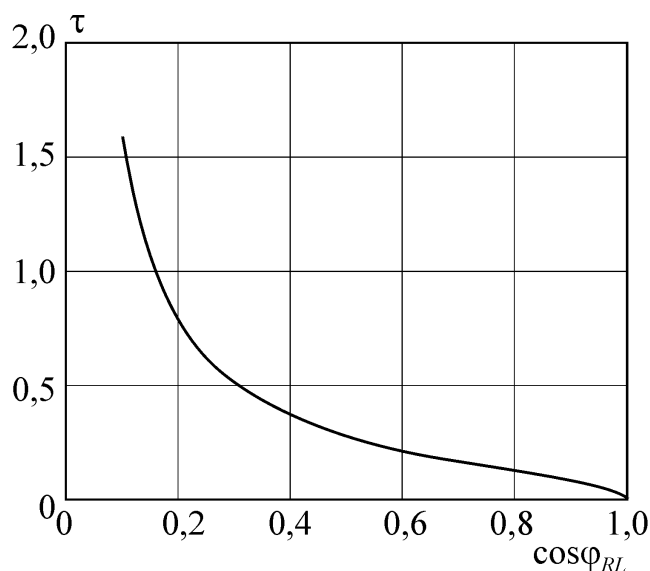


Рис. 6.1

где u_m^* и u_{sm} – амплитудные значения сигналов модуляции и развёртки. При моделировании достаточно ограничиться приблизительно десятикратным изменением $0,125 < \gamma \leq 1,0$.

Для получения наилучшего спектрального состава [8] частоту сигнала линейной развёртки f_s примем кратной шести по отношению к частоте основной гармоники сигнала модуляции f_1

и проведём исследование при $\phi = f_s / f_1 = 6 \cdot k$, где $k = 1, 2 \dots 6$. При ШИМ и частоте основной гармоники 50 Гц это соответствует частотам коммутации 300...1800 Гц.

Принятые условия моделирования (симметрия нагрузки и алгоритма коммутации, идеальный инвертор и источник питания, отсутствие противо-ЭДС) обеспечивают предельно возможные показатели качества преобразования энергии и являются верхней границей его оценки.

Оценку энергетической эффективности алгоритмов выполним с помощью коэффициентов искажения напряжений и токов (КИ), называемых в англоязычной литературе коэффициентами THD (total harmonic distortion), а также коэффициентов мощности (КМ) и полезного действия (КПД).

Коэффициент искажения является отношением действующего значения балластных гармоник спектра к действующему значению полезной основной гармоники напряжения или тока. Для входа инвертора, питающегося от источника бесконечной мощности ($U_{in} = U_d = \text{const}$), КИ напряжения и тока определяются выражениями

$$K_{U_{in}} = 0; \quad K_{I_{in}} = \frac{\sqrt{I_{in}^2 - I_d^2}}{I_d}, \quad (6.5)$$

где $I_{in} = \sqrt{\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} i_{in}^2 dt}$, $I_d = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} i_{in} dt$ – действующее и среднее значения входного тока.

Коэффициенты искажения синусоидальности кривых фазных напряжений и токов на выходе инвертора равны

$$K_{U_{out}} = \frac{\sqrt{U_{out}^2 - U_1^2}}{U_1}; \quad K_{I_{out}} = \frac{\sqrt{I_{out}^2 - I_1^2}}{I_1},$$

(6.6)

где U_{out}, I_{out} – действующие значения выходных фазных напряжений и токов и действующие значения их первых гармоник U_1, I_1 .

Коэффициент мощности определяется как отношение активной мощности P к полной S –

$$\chi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI}.$$

(6.7)

Активную мощность при моделировании можно вычислить интегрированием мгновенной мощности в течение периода. Для входа и выхода она равна соответственно

$$P_{in} = U_d I_d; \quad P_{out} = \frac{3}{T_1} \int_0^{T_1} u_{out}(t) \cdot i_{out}(t) dt.$$

(6.8)

Очевидно, что КПД инвертора равен отношению

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}}.$$

(6.9)

Оценка алгоритмов работы инвертора в соответствии с выражениями (6.5)...(6.9) в указанных выше диапазонах изменения $\cos \varphi_{RL}$, ϕ и γ с RL нагрузкой, соединённой звездой без нулевого провода, проводилась с помощью модели в среде Matlab/Simulink, описанной в разделе 4.1.

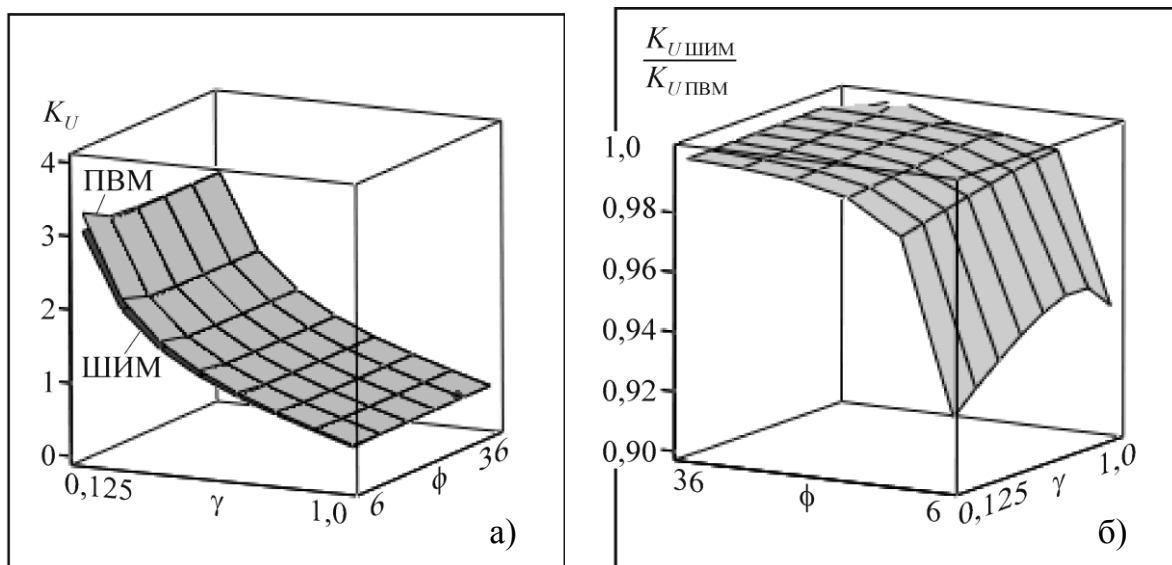


Рис. 6.2

На рис. 6.2, а показаны поверхности КИ синусоидальности выходного напряжения инвертора для обоих алгоритмов ШИМ, а на рис. 6.2, б – соотношения этих коэффициентов. Из рисунка следует, что этот показатель качества практически одинаков у обоих алгоритмов, однако при ШИМ он несколько меньше. Причём при $\phi > 6$ КИ практически не зависит от кратности частоты развёртки ϕ . Минимальное значение КИ составляет около 50%, что исключает возможность непосредственного использования таких преобразователей в качестве резервных источников питания, т.к. в соответствии с ГОСТ 13109-97 предельно допустимое значение КИ не должно превышать 12%, а нормально допустимое – 8%.

Коэффициенты искажений тока на входе и на выходе инвертора ($K_{I_{in}}, K_{I_{out}}$) и их соотношения показаны на рис. 6.3. Характер кривизны поверхностей $K_{I_{in}} = f(\cos \varphi_{RL}, \phi)$ и $K_{I_{out}} = f(\cos \varphi_{RL}, \phi)$ при глубине модуляции $\gamma < 1$ сохраняется. Следует отметить слабую зависимость $K_{I_{in}}$ и $K_{I_{out}}$ от кратности частоты развёртки ϕ , связанную с симметрией алгоритма коммутации инвертора.

Обращает на себя внимание, по сути, монотонное увеличение $K_{I_{in}}$ с ростом импеданса нагрузки. Это связано с увеличением длительности бестоковых пауз на входе инвертора, т.к. с ростом индуктивности нагрузки увеличивается продолжительность интервалов, в пределах которых ток замыкается через обратные диоды, минуя контур источника питания. Коэффициент искажения тока на входе инвертора $K_{I_{in}}$ при всех значениях γ многократно превосходит $K_{I_{out}}$ за исключением небольшой области, где $\cos \varphi_{RL} > 0,95$.

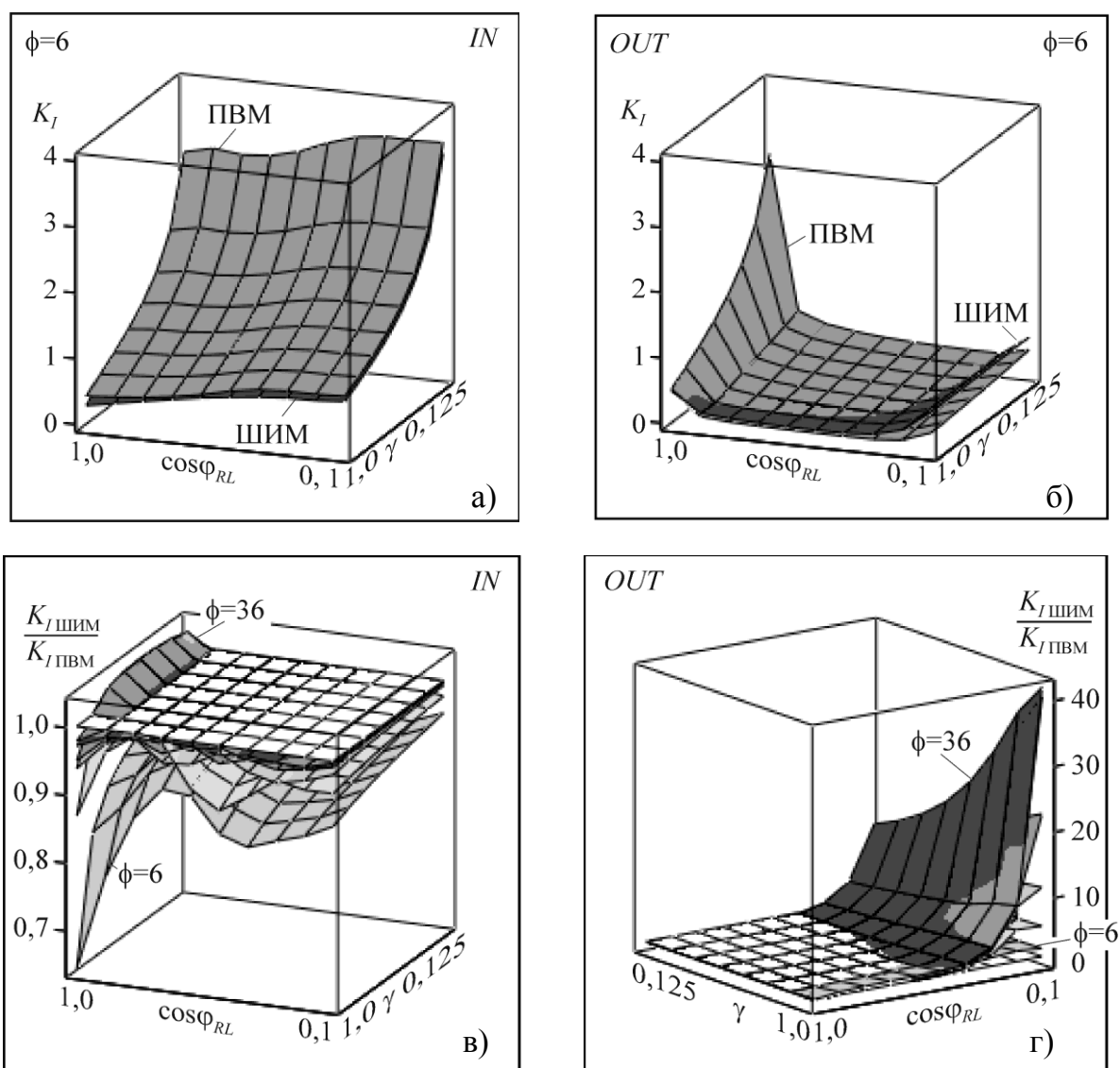


Рис. 6.3

Искажение тока на входе инвертора на 3...7% больше, чем искажение напряжения. При ПВМ оно всегда больше, чем при ШИМ, но при кратности частоты развёртки $\phi \geq 24$ отличие не превышает 10%..

На входе инвертора искажение тока при ШИМ меньше, чем при ПВМ за исключением небольшой области, где $\cos \phi_{RL} > 0,9$ и $0,9 > \gamma > 0,2$ и $1,0 < K_{I\text{ШИМ}} / K_{I\text{ПВМ}} < 1,05...1,07$ (рис. 6.3, в). В то же время искажение тока на выходе при $\cos \phi_{RL} < 0,5$ при ШИМ значительно больше, чем при ПВМ, и это различие усиливается с увеличением кратности ϕ (см. рис. 6.3, г). Однако в области $\cos \phi_{RL} > 0,5$ искажение выходного тока при обоих алгоритмах практически одинаково при всех кратностях развёртки.

Поверхности коэффициента мощности на входе инвертора $\chi_{in} = f(\cos \varphi_{LR}, \phi, \gamma)$ близки к плоскостям. Они практически совпадают при

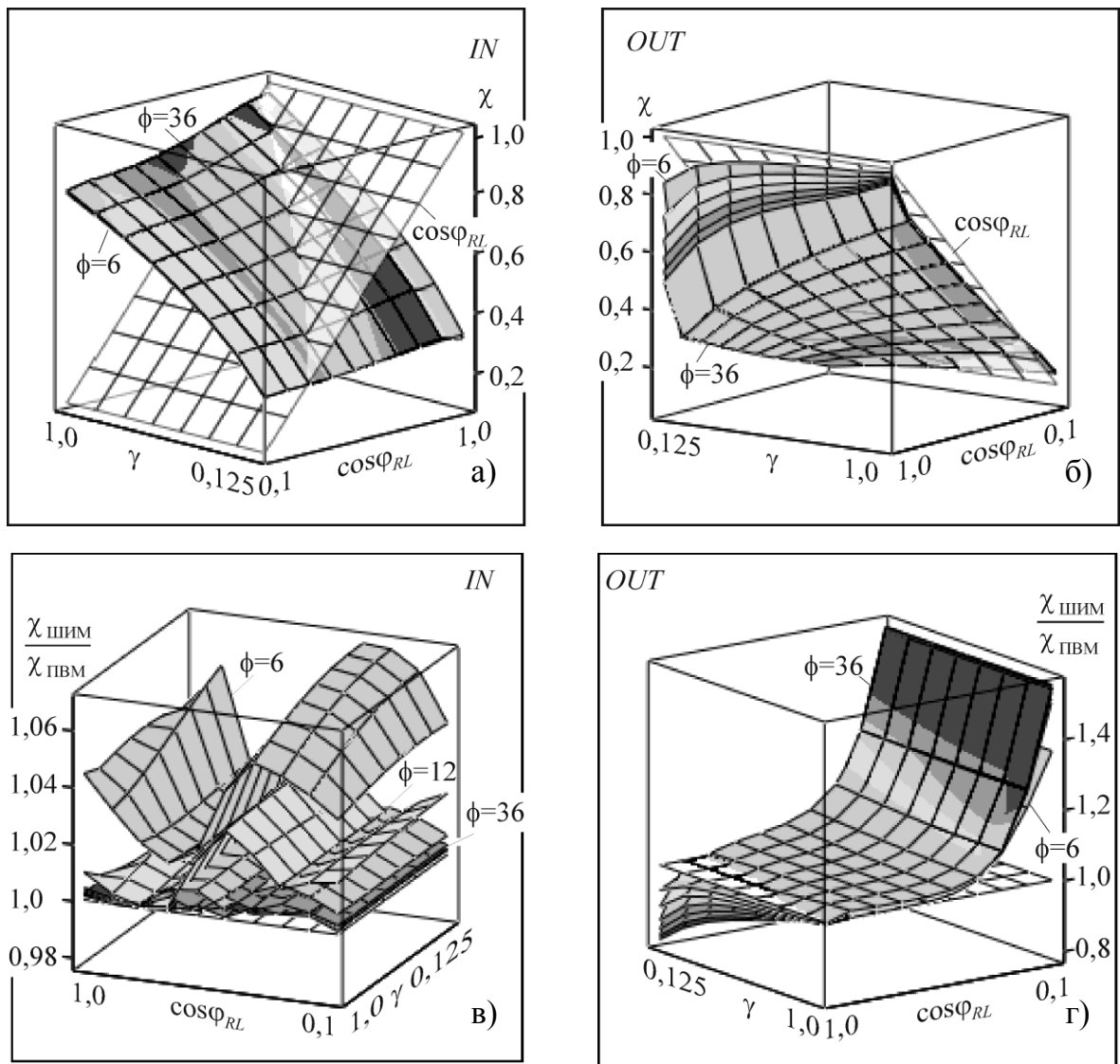


Рис. 6.4

различных значениях ϕ и незначительно различаются при ШИМ и ПВМ (рис. 6.4, а и в). При этом $\chi_{\text{ШИМ}} > \chi_{\text{ПВМ}}$, но при $\phi > 12$ это различие не превышает 2%. Величина коэффициента мощности на входе инвертора определяется глубиной модуляции γ и почти не зависит от значения $\cos \varphi_{RL}$ (рис. 6.4, а), т.е. $\chi_{in} = f(\cos \varphi_{LR}, \phi, \gamma) \approx f(\gamma)$. Характер изменения $\chi = f(\gamma)$ соответствует линии пересечения поверхности $\chi_{in} = f(\cos \varphi_{LR}, \gamma)$ с плоскостью $\chi_{in} = \cos \varphi_{LR}$. Эта линия близка к прямой и, соответственно, близка к линейной зависимости $\chi_{in} = f(\gamma)$.

Совершенно иначе выглядят поверхности $\chi_{out} = f(\cos \varphi_{LR}, \phi, \gamma)$. Они за исключением небольшой области, соответствующей $\cos \varphi_{RL} < 0,2$ и $\gamma > 0,7$ при ШИМ (рис. 6.4, б), располагаются ниже плоскости $\chi_{out} = \cos \varphi_{LR}$

, т.е. $\chi_{out} < \cos \varphi_{LR}$. При нагрузке с $\cos \varphi_{RL} < 0,9$ поверхности $\chi_{out} = f(\cos \varphi_{LR}, \phi, \gamma)$ практически сливаются в одну поверхность. При этом коэффициент мощности на выходе инвертора с ШИМ при глубоком регулировании и малом импедансе нагрузки меньше, чем при ПВМ. Однако при большом импедансе ($\cos \varphi_{RL} < 0,5$) ШИМ обеспечивает значительно более высокий коэффициент мощности (рис. 6.4, г).

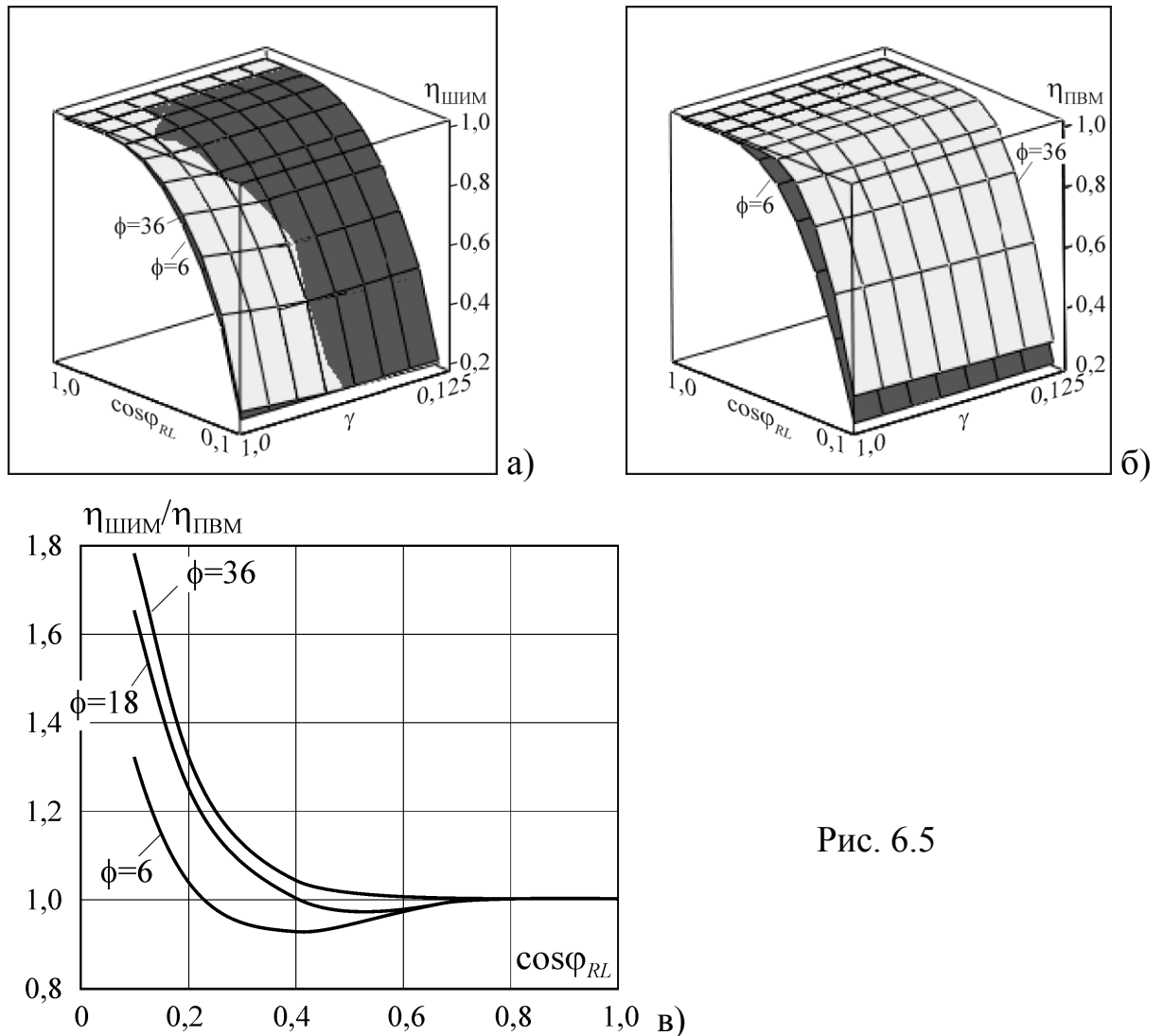


Рис. 6.5

Наиболее полно качество преобразования энергии инвертором отражается в его КПД. На рис. 6.5, а и б показаны поверхности $\eta = f(\cos \varphi_{LR}, \phi, \gamma)$ при ШИМ и ПВМ. Коэффициент полезного действия инвертора практически не зависит от глубины регулирования γ и очень слабо от кратности частоты развёртки ϕ , т.е. $\eta = f(\cos \varphi_{LR}, \phi, \gamma) \approx f(\cos \varphi_{LR})$. Оба алгоритма обеспечивают работу инвертора со 100% КПД при $\cos \varphi_{LR} > 0,7$. Однако вне этой области КПД резко уменьшается и при $\cos \varphi_{LR} \approx 0,2$ достигает величины $\eta \approx 60\%$. Это

объясняется большой активной мощностью высших гармоник и согласуется с уже отмеченной особенностью характеристик $\chi_{out} = f(\cos \varphi_{LR}, \phi, \gamma)$.

Пренебрегая незначительным влиянием ϕ и γ на КПД каждого алгоритма в отдельности, можно построить кривые соотношения КПД алгоритмов, показанные на рис. 6.5, в. Здесь видно, что безусловное преимущество ШИМ наблюдается при кратностях $\phi > 24$ при работе на нагрузку с реактансом $\cos \varphi_{LR} < 0,7$. При меньших кратностях существует область значений $\cos \varphi_{LR}$, при которых КПД инвертора с ПВМ несколько выше. Однако при $\cos \varphi_{LR} < 0,2$, т.е. в области, где значение КПД быстро снижается, ШИМ позволяет несколько улучшить эффективность преобразования, особенно при $\phi > 18$.

Таким образом:

1) Независимо от вида модуляции искажения тока на входе инвертора при глубоком регулировании значительно больше, чем на выходе, и они возрастают при увеличении реактанса нагрузки. Это создаёт дополнительную нагрузку на входной фильтр, вызывая в нём дополнительные потери энергии, что необходимо учитывать при проектировании и эксплуатации преобразователей частоты. Однако при ШИМ искажения входного тока несколько меньше, а коэффициент мощности выше, чем при ПВМ.

2) При значительном реактансе нагрузки ($\cos \varphi_{RL} < 0,5$) искажение тока на выходе инвертора с ШИМ больше, чем при ПВМ, но коэффициент мощности и КПД при этом выше. Это позволяет рекомендовать использование ШИМ в преобразователях, работающих на нагрузку с $\cos \varphi$, изменяющимся в широких пределах, если гармонический состав тока не имеет решающего значения.

3) *В целом полученные показатели качества преобразования энергии инвертором с ШИМ и ПВМ не позволяют сделать однозначную оценку этих алгоритмов. Различные фирмы, занимающиеся производством преобразователей частоты, в большинстве своих изделий обычно отдают предпочтение одному из способов модуляции. Так, например, в преобразователях серий iG5-RUS, iH5-RUS и iS5-RUS фирмы LG, мощностью 0,4...75 кВА используется ПВМ, а в преобразователях серий FR-S, FR-E, FR-F и FR-A приблизительно той же мощности фирмы Mitsubishi Electric – исключительно ШИМ.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глазенко Т.А. Импульсные полупроводниковые усилители в электроприводах. – М. - Л.: Энергия, 1965.
2. Глазенко Т.А. Полупроводниковые преобразователи в электроприводах постоянного тока. – Л.: Энергия, 1973.
3. Глазенко Т.А. Состояние и перспективы применения полупроводниковых преобразователей в приборостроении / Т.А. Глазенко, В.С. Томасов // Изв. вузов. Приборостроение. – 1996. - Т. 39. - № 3. – С. 5 - 12.
4. Козярук А.Е. История и перспективы развития полупроводниковой преобразовательной техники и систем электропривода на ее основе / А.Е. Козярук, В.С. Томасов // Изв. вузов. Приборостроение. – 1998. - Т. 41. - № 1 - 2. – С. 85 - 93.
5. www.vacon.com: VACON. User Manual & General Technical Inf. 2004.
6. SEW Eurodrive. Практика приводной техники. 1996. - Т. 7.
7. Maxwell Technologies Systems Division. DC bus ride-through system brochure. Arlington, MA, May 1998.
8. www.maxwell.com: Double layer electrochemical capacitors. User Manual & General Technical Information. 2004.
9. Lufrano F. Evaluation of nafion based double layer capacitors by electrochemical impedance spectroscopy / F. Lufrano, P. Staiti, M. Minutoli // Journal of Power Sources. 2003. - № 124. – pp. 314 - 320.
10. Ефимов А.А., Шрейнер Р.Т. Активные преобразователи в регулируемых электроприводах переменного тока. / Под общей ред. д-ра техн. наук, проф. Р.Т. Шрейнера. – Новоуральск: Изд-во НГТИ, 2001. - 250 с.
11. Розанов Ю.К. Современные методы улучшения качества электроэнергии (аналитический обзор) / Ю.К. Розанов, М.В. Рябчицкий // Электротехника. – 1998. - № 3. – С. 10 - 17.
12. Розанов Ю.К. Современные методы регулирования качества электроэнергии средствами силовой электроники / Ю.К. Розанов, М.В. Рябчицкий, А.А. Кваснюк // Электротехника. – 1999. - № 4. – С. 28 - 32.
13. Hui S.Y. A bi-directional AC-DC power converter with power factor correction / S. Y. Hui, H. Shu-Hung Chung, Y. Siu-Chung // IEEE Trans. on Power Electron., Sept. 2000. - Vol. 15. - No. 5. – pp. 942 - 949.
14. Зиновьев Г.С. Прямые методы расчета энергетических показателей вентильных преобразователей. – Новосиб.: 1990. - 220 с.
15. Зиновьев Г.С. Основы силовой электроники: Учебник. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1999, 199 с.;
16. Кругъ К.А. Основы электротехники. – М.: 1916. - 496 с., ил.
17. Френкель А. Теория переменных токов. – Л. - М.: ОНТИ, Энергоиздат, 1933. - 476 с., ил.

18. Вагнер К.Ф., Эванс Р.Д. Метод симметричных составляющих. – Л. - М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. - 408 с., ил.
19. Лурье Л.С. Коэффициент мощности несимметричной трехфазной нагрузки / Л.С. Лурье // Электричество. – 1952. - № 3.
20. Нейман Л.Р., Демирчян К.С. Теоретические основы электротехники. В двух томах. – Л.: Энергия, Ленинградское отделение, 1967.
21. Маевский О.А. Энергетические показатели вентильных преобразователей. – М.: Энергия, 1978. - 320 с., ил.
22. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: учебник для электротехн., энерг., приборостроит. спец. вузов. - 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1984. - 559 с., ил.
23. Дрехслер Р. Измерение и оценка качества электроэнергии при несимметричной и нелинейной нагрузке: пер. с чешск. А.А. Окина. – М.: Энергоатомиздат, 1985. - 112 с., ил.
24. Супронович Г. Улучшение коэффициента мощности преобразовательных установок: пер. с польск. под ред. В.А. Лабунцова. – М.: Энергоатомиздат, 1985. - 136 с., ил.
25. Новосельцев А.В. Определение составляющих полной мощности в однофазных электрических цепях на основе классического метода и метода гипотетических составляющих / А.В. Новосельцев, М.Т. Стрелков // – Киев.: 1986. - 64 с.
26. Герман-Галкин С.Г. Силовая электроника: лабораторные работы на ПК. – СПб.: КОРОНА принт, 2002. - 304 с., ил.
27. Герман-Галкин С. Г. Компьютерное моделирование полупроводниковых систем в MATLAB 6.0 [Текст]: учебное пособие / Герман-Галкин С. Г. СПб.: КОРОНА-принт, 2001. – 320с., ил.
28. Герман-Галкин С. Г. MATLAB и SIMULINK. Проектирование мехатронных систем на ПК [Текст] / Герман-Галкин С. Г. СПб.: КОРОНА-Век, 2008. – 368с., ил.
29. Васильев А.О. Функциональное моделирование в MATLAB активного корректора коэффициента мощности / А.О. Васильев, А.А. Зобенко, В.А. Хабuzов, В.Ф. Худяков // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2003. - № 2 (2). – С. 67 - 70.
30. Борисов П.А. Определение составляющих полной мощности энергоподсистем электротехнических комплексов / П.А. Борисов, В.С. Томасов // Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2004. № 1 (5). – С. 40 -
31. Чиликин М.Г. Общий курс электропривода: учебник для вузов. Изд. 5-е доп. и переработ. – М.: Энергия, 1971. - 432 с., ил.
32. М.В.Пронин, Силовые полностью управляемые полупроводниковые преобразователи (моделирование и расчет) [Текст] / М.В.Пронин, А.Г.Воронцов. СПб.: Электросила 2003. – 172с., ил.
33. Шрейнер Р.Т. Математическое моделирование электроприводов переменного тока с полупроводниковыми преобразователями частоты. [Текст]/ Шрейнер Р.Т. Екатеринбург: УРО РАН, 2000. – с. 273 – 288.
34. Титяев Д. К. Сравнительный анализ векторной и традиционной ШИМ модуляции [Электронный ресурс] / Титяев Д. К., Мирошник Д.Н. Режим доступа.

<http://www.masters.donntu.edu.ua/2007/fema/dovgan/library/2.pdf>

35. В. Козаченко Основные тенденции развития встроенных систем управления двигателями и требования к микроконтроллерам [Электронный ресурс] / В. Козаченко – Режим

доступа:

http://lalls.narod.ru/Statji/ATD/Osnovn_tendencii_razvit_vstroen_sistem_upravl_dvigat_i_trebovan_k_mikrokontrol.pdf.

36. Wajiha Shireen, Senior Member, IEEE, Mohammed S. Arefeen, Senior Member, IEEE, and David Figoli, Controlling Multiple Motors Utilizing a Single DSP Controller [Текст] / Wajiha Shireen, Senior Member, IEEE, Mohammed S. Arefeen, Senior Member, IEEE, and David Figoli - IEEE TRANSACTIONS ON POWER ELECTRONICS, VOL. 18, NO. 1, JANUARY 2003

37. Усольцев А.А. Частотное управление асинхронными двигателями [Текст]: Учебное пособие по дисциплинам электромеханического цикла / Усольцев А.А. – СПб.: – СПб ГУ ИТМО, 2006. – 94 с

38. Каганов И.Л. Промышленная электроника (общий курс). – М.: ВШ, 1968.–559 с.

39. Забродин Ю.С. Промышленная электроника. – М.: ВШ, 1982. – 496 с.

40. Руденко В.С., Сенько В.И., Трифонюк В. В. Основы промышленной электроники. – Киев: Вища школа, 1985. – 450 с.

41. Горбачев Г.Н., Чаплыгин Е.Е. Промышленная электроника. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 320 с.

42. Чиженов И.М., Руденко В.С., Сенько В.И. Основы преобразовательной техники. – М.: ВШ, 1974. – 430 с.

43. Руденко В.С., Сенько В.И., Чиженов И.М. Преобразовательная техника. – Киев: Вища школа, – 1978. – 424 с.

44. Справочник по преобразовательной технике. – Киев: Техника, 1978. – 447 с.

45. ГОСТ 13109-87. Требования к качеству электрической энергии в электрических сетях общего назначения. – М.: Изд-во Стандартов, 1989.

46. Силовая электроника : учебник для вузов / Розанов Ю.К., Рябчицкий М.В., Кваснюк А.А., 2-е издание., стереотипное. – М.: Издательский дом МЭИ, 2009.- 632 с.:ил.

47. Виноградов А.Б. Анализ энергетических показателей и методика выбора оптимальных алгоритмов ШИМ для управления 3-фазным инвертором напряжения / Виноградов А.Б., Изосимов Д.Б. // Электричество. – 2009. - №5. –С. 37-41

48. Виноградов А.Б. Сравнительный анализ энергетических показателей алгоритмов управления высовольтным многоуровневым преобразователем. / Виноградов А.Б., Сибирцев А.Н., Коротков А.А., Монов Д.А. // Труды VII Международной (ХУП Всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2012. С.109-113.

49. Чаплыгин Е.Е. Спектральное моделирование преобразователей с широтно-импульсной модуляцией: учеб. пособие/Е.Е. Чаплыгин. – Москва: МЭИ, 2009. – 56 с.

50. Михеев К.Е., Томасов В.С. Анализ энергетических показателей многоуровневых полупроводниковых преобразователей систем электропривода. Научно-

технический вестник университета информационных технологий, механики и оптики , 2012, № 1(77) с. 41-46.

51. Машиностроение. Энциклопедия / ред. совет: К.В.Фролов (пред.) и др. М.: Машиностроение. Электроприводы. Т. IV-2 / Л.Б. Масандилов, Ю.Н.Сергиевский, С.К.Козырев и др.; под общей ред. Л.Б.Масандилова, 2012. 52- с.:ил.

52. Браславский И.Я., Ишматов З.Ш., Костылев А.В., Плотников Ю.В., Поляков В.Н., Эрман Г.З., Антонов Д.Л. Оценка энергетической эффективности частотно-регулируемых электроприводов при различных законах скалярного управления. Труды VII Международной (XVII Всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2012. с. 42-45.

53. Водовозов А.М., Королёв Т.В. Система оценки энергетических параметров электропривода переменного тока. //Труды VII Международной (XVII Всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2012. с. 96-100.

54. Виноградов А.Б., Сибирцев А.Н., Коротков А.А. Монов Д.А. Сравнительный анализ энергетических показателей алгоритмов управления высоковольтным многоуровневым преобразователем. //Труды VII Международной (XVII Всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2012. с. 109-113.

55. Казаков Ю.Б., Швецов Н.К. Влияние способов и параметров широтно-импульсного модулирования напряжения на дополнительные потери в асинхронном двигателе. //Труды VII Международной (XVII Всероссийской) конференции по автоматизированному электроприводу АЭП-2012. с. 117-120.

56. On the Energy Optimized Control of Standard and High-Efficiency Induction Motors in CT and HVAC Applications / F. Abrahamsen, Blaabjerg, J.K. Pedersen, P.Z. Grabowski, P. Thogersen // IEEE Transaction On Industry Application. Vol. 34, No. 4, July/August 1998.

57. Рывкин С.Е., Изосимов Д.Б. Широтно-импульсная модуляция напряжения трёхфазных автономных инверторов // Электричество. 1997. №6. с. 33-39.

58. Granado J., Harley R.G., Diana G. Understanding and designing a space vector Pulse-Width-Modulator to control a three phase inverter. Trans. IEEE, Septem. 1989. P. 29-37.

59. Halasz S., Csonka G., Hassan A.A.M. Sinusoidal PWM techniques with additional zero-sequence harmonics. IECON'94, Bologna. 1994. P. 273-289.

60. D. Casadei, G. Serra, A. Tani, and L. Zarri, "Theoretical and Experimental Analysis for the RMS Current Ripple Minimization in Induction Motor Drives Controlled by SVM Technique," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 51, no. 5, pp. 1056-1065, Oct. 2004.

61. Cataliotti, F. Genduso, A. Raciti, and G. R. Galluzzo, "Generalized PWM VSI Control Algorithm Based on A Universal Duty Cycle Expression: Theoretical Analysis, Simulation Results, and Experimental Validations," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 54, no. 3, pp. 1569-1580, Jun.2007.

62. Mehrizi Sani and S. Filizadeh, "An Optimized Space Vector Modulation Sequence for Improved Harmonic Performance," IEEE Trans. Ind. Electron., vol. 56, no. 8, pp. 2894-2903, Aug. 2009.

63. M. H. Bierhoff and F. W. Fuchs, "DC Link Harmonics of Three Phase Voltage Source Converters Influenced by the Pulse Width Modulation Strategy-An Analysis," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 5, pp. 2085-2092, May 2008.
64. M. Hava and E. Un, "Performance Analysis of Reduced Common Mode Voltage PWM Methods and Comparison with Standard PWM Methods for Three Phase Voltage Source Inverters," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 24, no. 1, pp. 241-252, Jan. 2009.
65. X. Wu, S. K. Panda, and J. Xu, "Effect of Pulse Width Modulation Schemes on the Performance of Three Phase Voltage Source Converter," in *Proc. 33rd Annu. IEEE IECON*, 2007, pp. 2026-2031.
66. M. J. Meco Gutierrez, F. Perez-Hidalgo, F. Vargas-Merino, and J. R. Heredia-Larrubia, "A New PWM Technique Frequency Regulated Carrier for Induction Motors Supply," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 53, no. 5, pp. 1750-1754, Oct. 2006.
67. S. Fukuda and Y. Iwaji, "Introduction of the Harmonic Distortion Determining Factor and its Application to Evaluating Real Time PWM Inverters," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 31, no. 1, pp. 149-154, Jan./Feb. 1995.
68. G. Narayanan and V. T. Ranganathan, "Analytical Evaluation of Harmonic Distortion in PWM AC Drives using the Notion of Stator Flux Ripple," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 20, no. 2, pp. 466-474, Mar. 2005.
69. G. Narayanan, D. Zhao, H. K. Krishnamurthy, R. Ayyanar, and V. T. Ranganathan, "Space Vector Based Hybrid PWM Techniques for Reduced Current Ripple," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 55, no. 4, pp. 1614-1627, Apr. 2008.
70. V. S. S. Pavan Kumar Hari and G. Narayanan, "Comparative Evaluation of Space Vector Based Pulse Width Modulation Techniques in Terms of Harmonic Distortion and Switching Losses," in *Proc. MCDES*, May 2008. [CD-ROM].
71. Kaushik Basu, J. S. Siva Prasad, G. Narayanan, Harish K. Krishnamurthy, and Rajapandian Ayyanar, "Reduction of Torque Ripple in Induction Motor Drives Using an Advanced Hybrid PWM Technique," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 57, no. 6, JUNE, pp. 2085-2091, 2010.
72. D. Grahame Holmes, Thomas A. Lipo, "Pulse Width Modulation for Power Converters," A John Wiley & Sons, Inc. Publication, IEEE Press.
73. J. Holtz, "Pulse Width Modulation- A Survey," *IEEE Tans. on Industrial Electronics*, vol. 39, No. 5, December 1992, pp.410-420.
74. J. Holtz, "Pulsewidth Modulation for Power Converters", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 82, No. 8, 1994, pp. 1194-1214.
75. J. Holtz, "Pulse width modulation for electronic power conversion," *Proc IEEE*, vol IA-20, pp 1224-1228, Sept/Oct 1984.
76. F. Profumo, A Boglietti, G. Griva, M.Pastorelli, "Space Vector and Sinusoidal PWM techniques Compensation keeping in account the Secondary Effects," *Third AFRICON conference 92, Conf. Proc. 22-24 Sep. 1992*, pp. 394-399.
77. Zhenyu Yu, Arefeen Mohammed, Issa Panache, "A Review of Three PWM Techniques," *Proceedings of the American Control Conference*, New Mexico, June 1997, pp. 257-261.

78. Keliang Zhou, Danwei Wang, "Relationship between Space-Vector Modulation and Three-phase Carrier Based PWM: A Comprehensive Analysis," IEEE Trans. on Industrial Electronics, vol. 49, No. 1, Feb-2002, pp. 186-196.
79. Atif Iqbal, Adoum Lamine, Imtiaz Ashrap, Mohibullah, "MATLAB/Simulink Model of Space Vector PWM for Threephase Voltage source Inverter," Universities Power Engineering Conference-06, Conf. Proceedings, 6-8 Sept. 2006, pp.1096-1100.
80. H. Pinheiro, F. Botteron, C. Rech, L. Schuch, R. F. Camargo, H. L. Hey, H. A. Grundling, J. R. Pinheiro, "Space Vector Modulation for Voltage-Source Inverters: A Unified Approach," Industrial Electronics Society 28th Annual Conference 2002, Conf. Proc. 5-8 Nov. 2002, vol.1 PP. 23-29.
81. Bellini. A, S. Bifaretti, "Comparison between Sinusoidal PWM and Space Vector Modulation Techniques for NPC Inverters", IEEE Russia Power Tech 2005, 27-30 June 2005, pp. 1.-7.
82. C. Ong, "Dynamic Simulation of Electrical Machinery Using Matlab/Simulink", Prentice Hall 1997.
83. Murphy, J.M.D., Egan, M.G., "A Comparison of PWM Strategies for Inverter-Fed Induction Motors", IEEE Trans. On Industry Applications, vol. 1A-19, issue 3,1983, pp.363-369.
84. H. W. van der Broeck, H. Ch. Skudelny, and G. Stanke, "Analysis and realization of a pulse width modulator based on voltage source space vectors," IEEE Transactions on Industrial Applications, vol 24 , pp 142-150, 1988.
85. S. Ogasawara, H. Agaki, and A. Nabae, "A novel PWM scheme of voltage source inverter based on space vector theory," Conference record European Power Electronics Conf., pp 1197-1202, 1989.
86. J A Houldsworth and D. A. Grant, "The use of harmonic distortion to increase the output voltage of the three phase PWM," IEEE Transactions on Industrial Applications, vol 24 , pp 142-150, 1988.
87. J W Kolar, H Ertl, F C Zach, "Influence of modulation method on the conduction and switching losses of a PWM Converter system," IEEE Transactions on Industrial Applications, vol 27 , pp 1063-1075, 1991.
88. A M Trzynadlowski and S Legowski, "Minimum- Loss Vector Strategy for Three Phase Inverters," IEEE Transactions on Power Electronics, vol 9 , pp 26-34, Jan 1994.
89. K Zhou and D Wang, "Relationship between space-vector modulation and three phase carrier based PWM: A comprehensive analysis," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol 49 no 1, Feb 2002, p 186-195.
90. C B Jacobina, A M N Lima, R C da Silva, R Alves, and P F Seixas, "Digital scalar pulse width modulation: A simple approach to introduce Non-Sinusoidal modulating waveforms," IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 16, no. 3, May, 2001, p 351-359.
91. Hava, R. J. Kerkman and T. A. Lipo, "Carrier based PWM VSI overmodulation strategies: Analysis, Comparison, and Design," IEEE Transactions on Power Electronics, vol. 13, no. 4, pp. 674-689, July 1998.